

Study on chaotic response of a class of nonlinear dynamical system by path integral method

An Junjie

Hunan Vocational College of science and technology, Changsha

Abstract: Path integration method was used to study the chaotic response of the nonlinear dynamical systems and the probabilistic nature such as the instantaneous probability density of chaotic systems with the lévy noise was calculated. Then the impacts of lévy noise on chaotic movement of the deterministic systems were discussed. The findings show that evolution of probability density of chaotic systems can be used to character structure feature of such chaotic attractor.

Key words: Path integration; Probability density; Nonlinear stochastic dynamical systems

Received: 2020-01-22; Accepted: 2020-02-06; Published: 2020-02-08

路径积分法研究一类非线性动力系统的混沌响应

安俊杰

湖南科技职业学院，长沙

邮箱: jjan.07@hotmail.com

摘 要: 利用路径积分法研究一类非线性动力系统的混沌响应，计算 lévy 噪声激励的混沌系统的瞬时概率密度等概率性质，并讨论 lévy 噪声对确定性系统混沌运动的影响。研究表明，在噪声强度一定的情况下，其随机系统的概率密度的演化可以用来刻画该混沌吸引算子的结构特征。

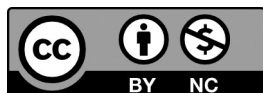
关键词: 路径积分；概率密度；非线性随机动力系统

收稿日期：2020-01-22；录用日期：2020-02-06；发表日期：2020-02-08

Copyright © 2019 by author(s) and SciScan Publishing Limited

This article is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



1 引言

目前,考虑到非线性动力学系统有可能具有复杂的确定性响应及随机响应,Yim 等及 Naess 等利用随机响应的概率密度分析混沌响应,即通过在具有确定性激励的系统中引入随机扰动,则确定性系统中的混沌吸引子的存在性可有效地利用随机响应在相空间的概率密度的演化来描述。本文主要利用路径积分法研究一类非线性动力系统的混沌响应,计算了 lévy 噪声激励的混沌系统的瞬时概率密度、边缘概论密度及平均概率密度。并讨论了 lévy 噪声对确定性系统混沌运动的影响。研究表明,在噪声强度一定的情况下,随机系统的概率密度的演化可以用来刻画该混沌吸引算子的结构特征。

2 路径积分法

在文献 [7] 中,作者借助路径积分法来寻求“非线性”FPK 方程的形式解,并首先提出求解较高维 FPK 方程的路径积分数值方法。这里“非线性”指的是 FPK 方程漂移向量和扩散向量对系统状态变量的非线性依赖关系。之所以对形式解感兴趣,是因为路径积分能给出绕确定性路径的近似解的适当初值点。最关键的一点是,路径积分形式解可以在非平衡热力学领域中延拓热力学平衡概念,如热力学势能等。

路径积分法的基本思想是,在空间和时间上分别离散化,以路径和代替积分,即通过连接短时的转移概率密度形成全局的转移概率密度,得到状态向量的联合概率密度函数。路径积分法最优越的特性在于可得到非负的、较准确的尾部概率密度。此外,路径积分法还可以计算系统的非平稳瞬态概率密度以及首次穿越等问题。

定义路径积分的最简便方法是把连续过程离散化在空间和时间限定的充分小的网格点上。然而,一个连续过程的离散化并不唯一。因此,对于不同的离散规则,就产生了许多不同的路径积分方法。为建立协变路径积分,就需要选择特定的离散化规则,这使得很多研究者致力于在不给出特定的离散化规则的情况下,提出各种推导协变路径积分的方法。

3 考虑 Lévy 噪声对混沌运动的影响

本文尝试着将高斯白噪声改成 Lévy 噪声，采用的 Lévy 过程是 α -stable Lévy 过程。

考虑如下的动力系统，

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \beta x^3 - (\delta + f_0 \cos(\alpha t))x = \zeta L_t \quad (1)$$

其中： γ ， ζ ， β 都是正的； L_t 是 α -stable Lévy 噪声，其强度为 ζ 。 f_0 ， α 分别表示周期项系统的强度和频率，当 $\zeta=0$ 时，方程 (1) 为确定性系统，

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \beta x^3 - (\delta + f_0 \cos(\alpha t))x = 0 \quad (2)$$

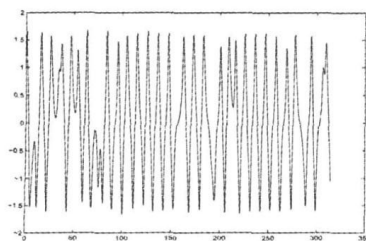
对于确定性系统，当参数取，

$$\gamma = 0.3, \beta = 1, \delta = 1, f_0 = 0.6, \alpha = 1.2 \quad (3)$$

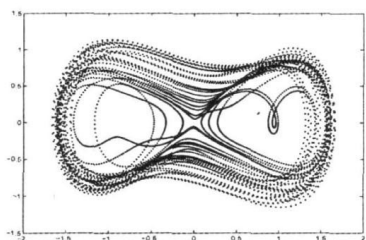
时可以得到确定性系统的时间历程图 (图 1(a))、相轨图 (图 1(b)) 及 Poincaré 截面图 (图 1(c))。本文中所用的 Poincaré 映射均定义为，

$$P: \Sigma \rightarrow \Sigma,$$

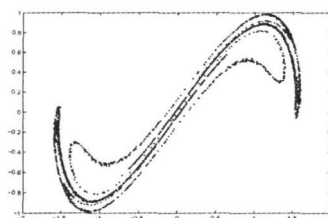
$$\Sigma = \{x_1, x_2 \mid v = \frac{2n\pi}{\alpha}, n = 0, 1, 2, \dots\} \in \mathbb{R}^2$$



(a) 时间历程图



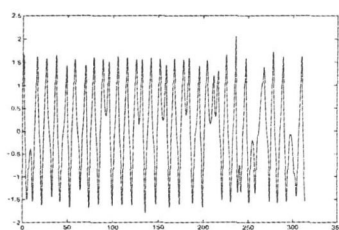
(b) 相轨图



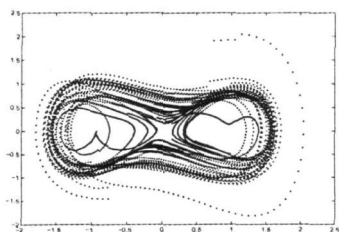
(c) Poincaré 截面图

图 1 确定性系统的相关图形

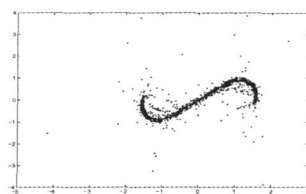
对于方程 (2) 所示确定性系统, 可直接数值求解, 并得出其 Poincaré 截面图。在 lévy 噪声情况下, 当参数取值为式 (3) 及 $\zeta=0.0005$ 时, 可得到相应的时间历程图 (图 2(a)), 相轨图 (图 2(b)), Poincaré 截面图 (图 2(c))。



(a) 时间历程图



(b) 相轨图



(c) Poincaré 截面图

图 2 考虑 lévy 噪声时系统的相关图形

对比图 1(a) 和图 2(a), 我们可发现动力系统 (1) 的确定性系统的时

间历程图和随机激励下系统的时间历程图是相似的，均呈现出无规则性。对比图 1 (b) 和图 2 (b)，可见确定性系统的相轨程图和随机激励下系统的相轨图也是相似的，但进一步观察可以发现，确定性系统在随机激励的作用下，相轨图稍微向外扩散，而且相对高斯噪声的情况，扩散得更厉害。同样对比图 1 (c) 和图 2 (c) 可以发现它们也是很相似的，确定性系统在随机激励的作用下，Poincaré 截面图有稍微向外扩散，但是相对高斯噪声的情况，扩散得更厉害。基于上述的对比，可以认为：在一定强度的随机激励下，可以利用路径积分的方法来确定非线性混沌系统。

下面利用路径积分方法求解系统 (1) 在参数为， $\gamma=0.3$ ， $\beta=1$ ， $\delta=1$ ， $f_0=0.6$ ， $\alpha=1.2$ 及 $\zeta=0.0005$ 时，的瞬时概率密度函数、边缘概率密度函等，结果如图 3 ~ 图 5 所示。

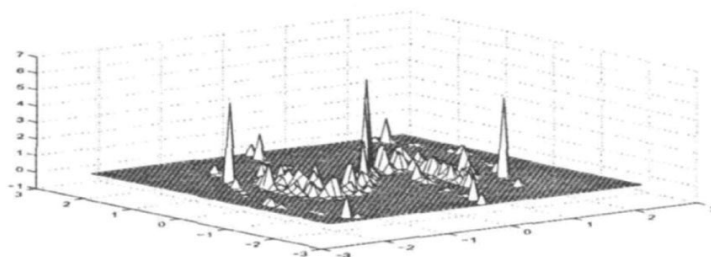


图 3 系统的瞬时概率密度

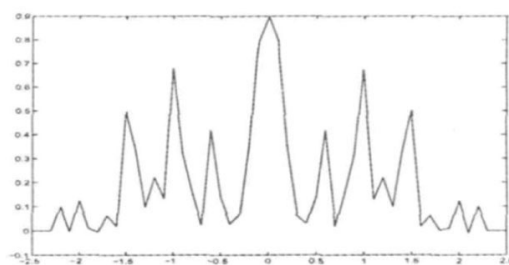


图 4 系统的 $y_{1,t}$ 边缘概率密度

在参数为， $\gamma=0.3$ ， $\beta=1$ ， $\delta=1$ ， $f_0=0.6$ ， $\alpha=1.2$ 及 $\zeta=0.0005$ 时，图 3 所示系统 (1) 的联合瞬时概率密度，图 4 表示系统 (1) 的 $y_{1,t}$ 边缘概率密度分析，图 5 表示系统 (1) 的 $y_{2,t}$ 边缘概率密度分布。

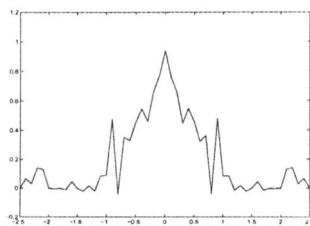


图5 系统的 $y_{2,t}$ 边缘概率密度

与高斯白噪声的情况一样，在求得瞬时随机系统的性质后，可进一步用随机系统的概率密度形状来表征相应的确定性系统的混沌吸引子的结构。考虑系统(1)在参数， $\gamma = 2, \beta = 1, \omega_0^2 = 1, f_0 = 0.3, \alpha = 1$ 及 $\zeta = 0.0005$ 时，应用，

$$\bar{P}(x_1, x_2) = \frac{1}{T} \int_{t'}^{t'+T} p(x_1, x_2) dt \quad (4)$$

可表征出关于时间平均的联合概率分布（见图6）。

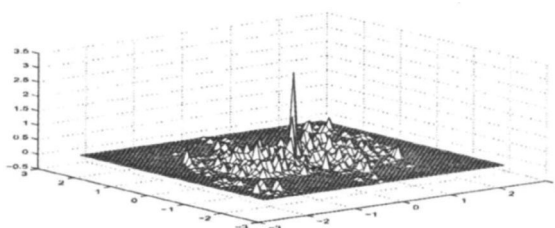


图6 系统的联合概率分布

4 结论

本文尝试把高斯白噪声改成lévy噪声，讨论了受lévy噪声激励的动力系统混沌运动在参数为， $\gamma = 0.3, \beta = 1, \delta = 1, f_0 = 0.6, \alpha = 1.2$ 及 $\zeta = 0.0005$ 时，与确定性系统混沌运动的时间历程图、相轨图及Poincaré截面图的关系。结论表明，它们有着相似性。因此，我们可以用概率密度来解释混沌吸引子的存在性，即借助随机系统的概率密度在一定程度上刻画了确定性系统的混沌吸引子。同时，我们也发现，由于lévy噪声激励对随机噪声的要求更严格，即lévy噪声与高斯白噪声相比，其噪声强度要求相对更小，否则会使得确定性系统得到严重的破坏。

参考文献

- [1] Yim S C S, Lin H. Unified Analysis of Complex Nonlinear Motion via Densities [J] . Nonlinear Dynamics, 2001, 24 (1) : 103–127.
- [2] Naess A. Chaos and Nonlinear Stochastic Dynamics [J] . Probabilistic Engineering Mechanics, 2000, 15 (1) : 37–47.
- [3] Moon F C. Chaotic and Fractal Dynamics: An Introduction for Applied Scientists and Engineers [M] . New York: Wiley & Sons Inc, 1992.
- [4] Samorodnitsky G, Taqqu M S. Stable Non-Gaussian Random Processes [M] . New York: Chapman & Hall, 1994.
- [5] Naess A, Johnsen J M. Response Statistics of Nonlinear Compliant Offshore Structures by the Path Integral Solution Method [J] . Probabilistic Engineering Mechanics, 1993, 8 (1) : 91–106.
- [6] Naess A, Moe V. Stationary and Non-stationary Random Vibration of Oscillators with Bilinear Hysteresis [J] . International Journal of Non-Linear Mechanics, 1996, 31 (5) : 553–562.
- [7] Naess A, Moe V. Efficient Path Integration Method for Nonlinear Dynamic Systems [J] . Probabilistic Engineering Mechanics, 2000, 15 (4) : 221–231.