

## Chaos synchronization based on space coupled multimode laser array

Hu Chaoxu

Jiangxi University of Science and Technology, Nanchang

**Abstract:** The dynamic behavior of a two-dimensional  $3 \times 3$  planar space coupled multimode laser array is simulated. The results show that the total intensity and the intensity of each corresponding mode between the sub diagonal of the laser array and the paired laser pairs (laser 2 and 4, laser 3 and 7, laser 6 and laser 8) parallel to the sub diagonal can achieve chaos synchronization, and there is mode competition between the modes of the same laser. By calculating and analyzing the power spectrum and Lyapunov exponent, the laser system is in chaos.

**Key words:** Nonlinear optics; chaos synchronization; multimode laser; coupling; power spectrum; Lyapunov index

Received: 2020-03-28; Accepted: 2020-04-12; Published: 2020-04-14

# 基于空间耦合多模激光阵列的混沌同步研究

胡超旭

江西理工大学, 南昌

邮箱: cxhu\_00@163.com

**摘要:** 对二维  $3 \times 3$  平面型空间耦合多模激光阵列的动力学行为进行了数值模拟。研究表明, 处于激光阵列的次对角线及平行于次对角线的配对激光对(激光 2 和 4, 激光 3 和 7, 激光 6 和 8) 之间的总强度和各对应模式的强度可以实现混沌同步, 且同台激光各模式之间存在模式竞争。通过计算和分析功率谱和李雅普诺夫指数, 该激光系统确实处于混沌状态。

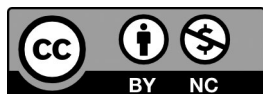
**关键词:** 非线性光学; 混沌同步; 多模激光; 耦合; 功率谱; 李雅普诺夫指数

收稿日期: 2020-03-28; 录用日期: 2020-04-12; 发表日期: 2020-04-14

Copyright © 2019 by author(s) and SciScan Publishing Limited

This article is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



20世纪末以来,对于非线性耦合的激光混沌、混沌同步和混沌控制的研究一直是国际上非线性科学研究领域中的热点课题之一,在理论和实验上受到了很大的关注,并且有着广阔的应用前景。目前,应用于高精度实验的激光器拥有极好的相干性、单向性、集中性和优异的可操控性,同时激光系统具有高速、大容量、高保密性的特性可以在多模式,多信道的光纤中传播,使研究人员以极大的兴趣投入到对激光系统的研究。建立在空间局域耦合的激光系统的混沌同步基础上的保密通信吸引了国内外专家和学者的极大关注。在近期的研究中,多台空间耦合的单模激光系统和多模耦合线形激光系统的混沌同步和混沌加密通讯已经取得了一定的成果。在近年来,笔者对于一维线性的单模和多模激光阵列进行了一定的研究,并将成果发表在也相关期刊上。然而,随着近年来的研究成果,笔者发现,对于研究激光系统的混沌和混沌同步来说,直线型激光阵列的排列方式也有一定的缺陷和不足:直线型的激光阵列意味着需要较多的激光器,容易造成试验资源的浪费和过度消耗,而传递的信息量却相对较少,形成了矛盾;直线型的激光阵列无法有效的传输一般是二维平面型信息的图像,这对其应用造成了极大的影响;以前所考虑的激光阵列均是以单模激光阵列的形式出现的。在实际的应用过程中,尤其是短程损耗较小的时候,多模激光(多模光纤)多通道的通信方式能有效的提高信息传输的容量;由激光产生的混沌信号具有高速,宽频带的传输特性。国内外同行对多模激光(多模光纤)系统可以应用于混沌保密通讯进行了理论和试验的研究和论证。由此,这就很有必要对二维 $N \times N$ 平面型的空间耦合的多模激光阵列的混沌同步和混沌保密通信进行一定的研究。

本文在近期国内外相关研究进展的基础上,结合平面网格单模激光阵列和多模激光的模型,并考虑构建的激光模型的合理性,在理论上得到了 $N \times N$ 平面型空间耦合的多模激光阵列的动力学常微分方程组。这里,只选取 $3 \times 3$ 平面型多模激光阵列为例,研究阵列中每台激光器的混沌强度的输出(含总强度和分模式强度),以及如何调试合理的参数,实现整个激光系统达到混沌以及混沌同步的状态。同时,对阵列中各台激光的输出功率谱和整个激光系统的李雅普诺夫指数的研究,从另一个侧面反映了处于混沌状态的平面型多模式激光阵列的实现。

## 1 平面型多模激光阵列的动力学方程组

理论上, 空间耦合的  $N \times N$  平面型多模式 Nd: YAG 激光阵列的动力学常微分方程组可以表示为:

$$\frac{dE_{i,j}}{dt} = \frac{1}{\tau_c} [G_{i,j} - \alpha_{i,j}] E_{i,j} - \kappa_{i,j;i,j+1} E_{i,j+1} - \kappa_{i,j;i,j-1} E_{i,j-1} + i\omega_{i,j} E_{i,j} \quad (1)$$

$$\frac{dG_{i,j}}{dt} = \frac{1}{\tau_f} \{p_{i,j} [1 + M_{i,j} \sin(\Omega_{i,j}t)] - G_{i,j}(1 + |E_{i,j}|^2 + \sum_{i=1, k \neq i}^{N'} \beta_{k,j} |E_{k,j}|^2)\} \quad (2)$$

$$E_j = \sum_{i=1}^{N'} E_{i,j}, G_j = \sum_{i=1}^{N'} G_{i,j}, i = 1, 2, \dots, N' \quad (3)$$

模型中总计有  $N^2$  台激光, 其中, 下标  $j$  代表的是第  $j$  台激光, 下标  $i$  表示的是每台激光的第  $i$  个模式,  $E$  和  $G$  分别表示缓慢变化的复激光振动的振幅和能级间的粒子数反转,  $\tau_c$  表示激光场在腔中传播一个来回所需要的时间 (约为 0.2 ns),  $\tau_f$  则表示为 Nd: YAG 激光高能级的衰减时间 (约为 0.24 ms),  $\omega_j$  表示激光的频率失谐量, 其中第一台激光的频率为  $\omega_1=0.0$  rad/s, 相邻各台激光之间的失谐频率间隔为  $\Delta \omega = \omega_{j+1} - \omega_j = 5.0 \times 10^5$  rad/s,  $\alpha$  是各台激光器中腔模可调制的相关损耗参数 (约为 0.01),  $p$  是产生激光的泵浦输出参量 (约为 0.02),  $\Omega = 2\pi f_0$  是调节泵浦输出的角速度, 式 (2) 中  $\sum_{i=1, k \neq i}^{N'} \beta_{k,j} |E_{k,j}|^2$  是同一台激光不同模式之间的相互耦合作用,  $\beta$  ( $\approx 0.66667$ ) 是相应的模式耦合系数。

通常, 混沌激光系统的相邻激光之间的作用, 是采用光束重叠的空间耦合的作用方式, 考虑到这种作用很小, 因此, 这种作用一般只存在于最近邻的两台激光之间。对于所研究的两维  $3 \times 3$  平面型多模激光阵列的分布, 同一台激光根据其所处的位置, 其最近邻的激光台数可能是 2、3、4 台。与参考文献 [25-27] 中所述情况一样, 把阵列中任意两台相邻激光 (例如第  $j$  台和第  $j'$  台) 之间耦合系数  $k_{jj'}$  定义为:

$$\kappa_{jj'} = 2r \frac{u_j v_{j'}}{u_j^2 + v_{j'}^2} \exp \left[ -\frac{(d_{jj'})^2}{u_j^2 + v_{j'}^2} \right] \quad (4)$$

在式 (4) 中,  $d_{jj'}$  用于描述相邻两台激光束之间的距离, 一般可以产生这种作用的间距为 0.4 ~ 1.0 mm,  $u_j$ 、 $v_{j'}$  分别表示为激光束  $j$  和  $j'$  高斯分布腰的半径宽度, 通常为 0.1 ~ 0.2 mm, 相邻的激光光束之间的边缘处存在着相互重叠

作用 (overlap), 具体如图 1 所示。 $r$  是光束显微镜阵列的反馈系数。在这里的  $\kappa_{jj'}$  已经被归一化了: 当  $d_{jj'}=0, r=1, u_j=v_{j'}$  时,  $k_{jj'}=1$ 。数值模拟中, 相关参数设定为:  $r=0.21, u_j=0.105 \text{ mm}, v_{j'}=0.143 \text{ mm}$ 。为了实现该激光阵列的混沌及混沌同步, 各台激光的参数和初始条件均保持一致。激光输出强度  $I_j(t)$  的功率谱密度  $P_j(f)$  可以通过下式计算得到:

$$P_j(f) = \left| \frac{1}{2\pi} \int I_j(t) \exp(-i2\pi ft) dt \right|^2 \cdot \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \int I_j(t) \exp(-i\omega t) d\omega \right|^2 \right\}^{-1} \quad (5)$$

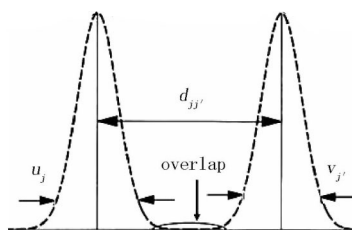


图 1 最近邻两台激光器光束之间相互重叠作用示意图

其中  $\omega = 2\pi f$ 。另外利用 Wolf 方法来计算该激光阵列的李雅普诺夫指数。如果计算得到激光系统的功率谱是在很宽的频带上不存在明显平坦的频率分布, 只要使得最大的李雅普诺夫指数是大于零的, 那就说明所研究的激光系统处于混沌状态, 在此基础上实现的同步确实是混沌同步。

为了便于说明并且不是一般性, 设定  $N=3$  台激光, 每台激光共有  $N'=3$  个模式, 对两维平面型  $3 \times 3$  多模激光阵列的混沌同步进行了较为详细的研究。在系统中, 按先行后列的顺序给这九台激光进行编号, 具体的实验装置和激光阵列具体排列如图 2 所示。

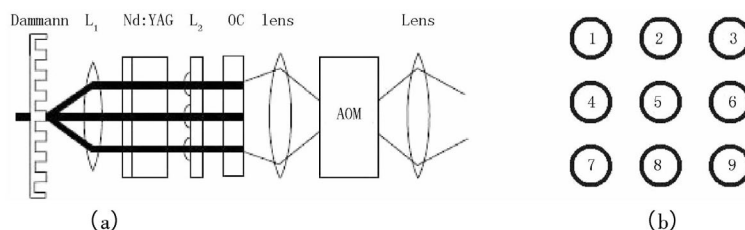


图 2 试验装置布局图 (a) 和两维  $3 \times 3$  激光阵列布局 (b)

## 2 数值模拟及结果说明

通过对激光阵列的动力学非线性微分方程组进行积分,可以得到该激光阵列的混沌强度输出的数值结果。借助计算机模拟结果,可以来分析具有空间耦合的  $3 \times 3$  平面型多模激光阵列的混沌同步的情况。需要指出,由于激光输出时的不稳定因素,需要略去最初一段时间暂态激光脉冲,因此本文中,采用  $1.0 \sim 3.0$  ms 作为数值模拟的时间范围。计算结果表明,当相邻两台激光之间的距离  $d_{ij}=0.4950$  mm 的时候,就可以在激光输出处于混沌状态时,实现平面型  $3 \times 3$  多模激光阵列输出强度的混沌同步。

图3为平面型多模激光阵列每台激光的混沌总强度输出。图4(a)~(c)是第一台激光的三个分模式强度输出的时序图;图4(d)~(i)分别为阵列中每台激光第一个模式强度输出。从图3~4中不难发现,每台激光的总强度和各个分模式强度的输出都不具有周期性运动的特点,而是呈现出杂乱无章的状态,是一组在数值上强弱不一、形如参差不齐针刺状的激光脉冲,这充分说明该激光阵列中每台激光的总强度以及各分模式强度随时间变化的输出均处于混沌状态。

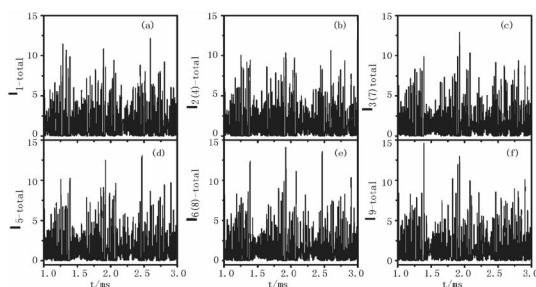


图3 每台激光的总强度输出

图5~7为激光阵列中任意两台激光输出总强度之间的相互关联。图5为其它各台激光与第一台激光的输出总强度之间的相互关联图。图6为各台激光(除第一台激光外)与第二台激光的输出总强度之间的相互关联图。图7为各台激光(除第一台、第二台激光外)输出总强度之间的相互关联图。从图5~7中,可以发现,配对激光(第2(4)台,第3(7)台,第6(8)台激光)的输出总强度的输出脉冲呈现出步调保持一致的混沌同步现象,在图中体现为相关联的

两台激光的总强度输出呈现出斜率为 1 特殊的正比例直线（形如  $y=x$ ）。而其它任两台激光输出总强度之间表现出的却是互不关联的混沌不同步状态，也就是说，一台激光的总强度输出与其他另一台激光的总强度输出是两个完全不同的数值。图 8 是激光系统中模式强度之间的相互关联图，（a）~（c）是第一台激光三个模式强度之间的相互关联

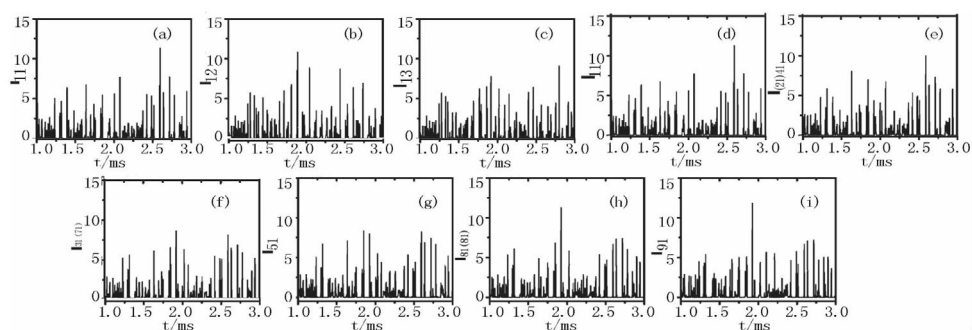


图 4 第一台激光三个模式的强度输出（a）~（c）和每台激光第一个模式的强度输出（d）~（i）

图；（d）~（f）为第二台和第三台激光对应模式强度之间的相互关联图；（g）~（i）是九台多模激光中对应的第一个模式之间实现混沌同步的相互关联图。从图 8 中，可以看到，每台激光分模式强度之间都存在着很强的模式竞争，尽管如此，前述中总强度输出处于混沌同步的配对激光对输出的各对应分模式强度之间还是会出现混沌同步的现象。其他任意激光对的对应模式强度之间则不存在混沌同步现象。

从图 5 ~ 8 中，还可以发现，正是由于配对激光对的对应分模式强度之间实现了混沌同步，这些配对激光对的总强度之间才能呈现出混沌同步的现象。

当考虑那九台激光在两维  $3 \times 3$  平面型多模激光阵列中的布局安排，可以发现，如果按线性代数中行列式的知识来分析，那么处于  $3 \times 3$  行列式的次对角线或者是与次对角线平行的位置上的配对激光对（第 2（4）台，第 3（7）台，第 6（8）台激光）恰好实现了输出强度（包含总强度和对应模式的强度）的混沌同步。



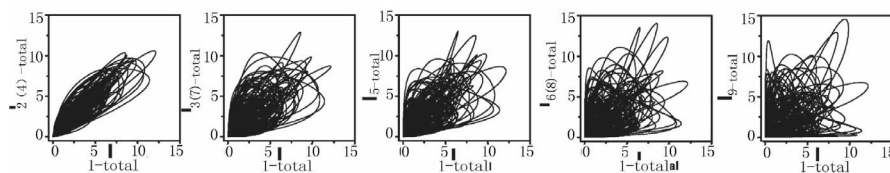


图5 其他各台激光与第一台激光之间的总强度的关联图

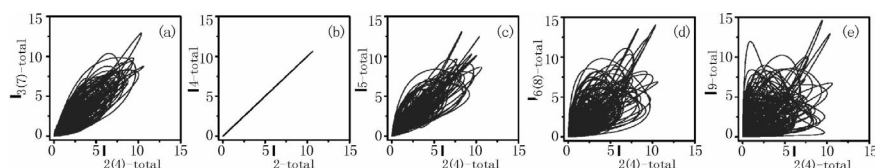


图6 除第一台激光外，第二台和其他各台激光之间的总强度的关联图

利用式(5)，可以计算得到空间耦合的平面型多模激光阵列中九台耦合的激光总强度输出激光功率谱，如图9所示。而图10(a)~(c)是第一台激光三个分模式强度对应的功率谱；(d)~(k)是余下8台激光的第一个模式强度对应的功率谱。从激光阵列中各台激光输出的总强度和分模式强度的功率谱中可以看到，这些功率谱在相当宽的频谱区间具有若干个尖峰，其余都存在很多起伏不定的小毛刺。通过分析频谱领域的功率谱，可以说明所研究的激光阵列确实处于混沌状态的区域。

图11是由81条数值曲线构成的，随相邻激光的耦合作用距离 $d_{ij}$ 变化的平面型多模耦合激光阵列的李雅普诺夫指数 $\lambda$ 。根据李雅普诺夫指数的相关知识可知，当最大李雅普诺夫指数 $\lambda_{\max} > 0$ 时，该激光系统处于混沌状态；当 $\lambda_{\max} < 0$ 时，该激光系统处于稳定的周期性状态；当 $\lambda_{\max} = 0$ 时，则表示该激光系统处于临界状



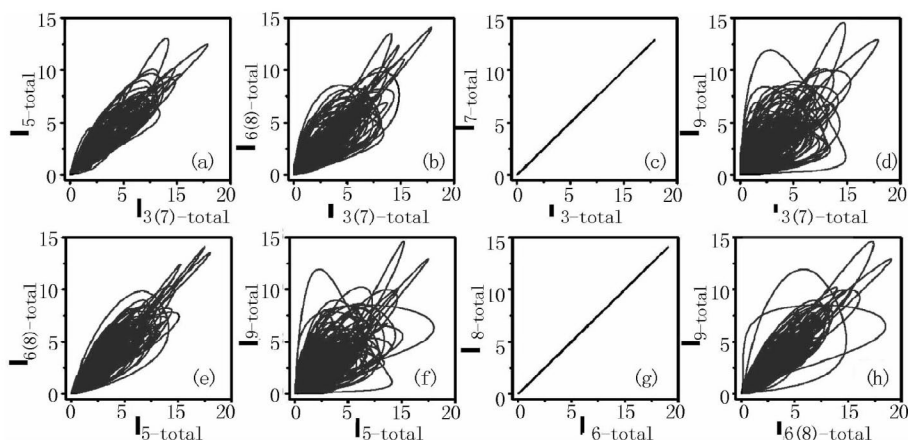


图 7 除了第一、二台激光之外，任两台激光之间的总强度的关联图

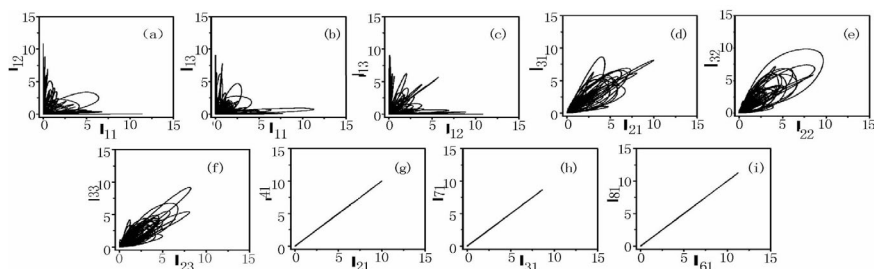


图 8 第一台激光三个模式强度之间的关联图 (a) ~ (c)、第二台和第三台激光对应模式强度之间的关联图 (d) ~ (f) 和九台多模激光中对应的第一个模式之间实现混沌同步的关联图 (g) ~ (i)

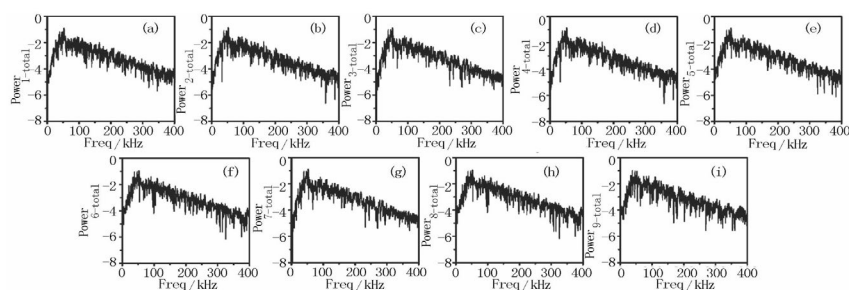


图 9 九台耦合的激光总强度输出的功率谱

态。如图 11 所示，该激光系统的最大李雅普诺夫指数  $\lambda_{\max}$  大于零的取值范围 (0.450 ~ 0.550 mm) 正好处于激光之间的耦合作用的可能距离，说明在这

个作用距离范围内,该平面型多模激光阵列的系统确实是处于混沌状态。相对于线性的单模激光阵列拥有相对较大的、分布较广的整个一片大的混沌区域的理论结果,平面型多模激光阵列能够取得混沌状态的区域呈现出一个相对较小的局部区域,由此,要实现该激光阵列输出强度(总强度和各个对应模式强度)的混沌同步的取值范围则就更小了。虽然由于调节激光参数的难度大大提高了,实现平面型多模激光阵列混沌同步的条件将变得更加苛刻,但是反过来,这也增加了传输过程中被窃取信息的难度,若能在该实现激光阵列混沌同步基础上,加载信息,进行保密通讯,这样可以大大增加通讯系统的保密性,确保信息能够安全准确的传送。

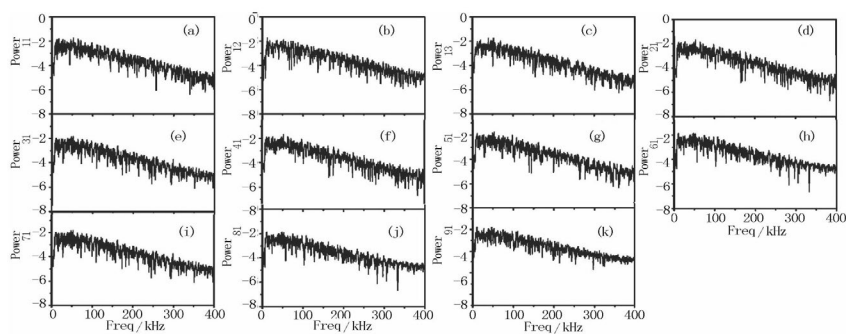


图 10 第一台激光三个分模式强度对应的功率谱 (a) ~ (c) 和余下八台激光第一个模式强度对应的功率谱 (d) ~ (k)

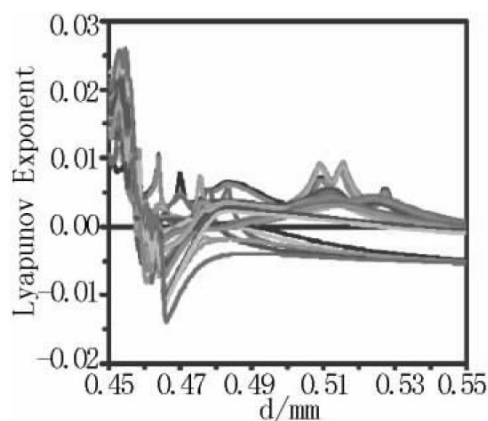


图 11 二维  $3 \times 3$  平面型多模耦合激光阵列的李雅谱诺夫指数

### 3 结论

利用数值模拟的方法,研究了二维  $3 \times 3$  平面型空间耦合的多模激光阵列输出强度(总强度和各个对应模式强度)的混沌和混沌同步。数值结果表明,通过调节合理的激光参数和实验设备,使相邻激光的耦合作用距离  $d_{ij}$  处于一定的范围,该激光系统的最大李雅普诺夫指数  $\lambda_{\max}$  大于零,可以在激光阵列中配对激光对(第2(4)台,第3(7)台,第6(8)台激光)的总强度输出和各个对应分模式的强度输出实现混沌和混沌同步。平面型多模激光阵列的输出总强度的混沌同步是建立在各个对应分模式输出强度的混沌同步的基础之上的,且同台激光的各个分模式之间存在着较强烈的模式竞争现象,这与之前研究线形多模激光系统的研究结论是一致的。虽然在输出总强度和各个对应分模式输出强度上实现混沌和混沌同步的这些配对激光对相互之间并没有相邻,也没有直接的相互作用,但是平面型空间耦合的多模激光阵列中任一激光都可以通过与其相邻的激光在空间光束重叠的耦合作用(如第一台激光(与之最近邻只有两台激光)、第二台激光(与之最近邻只有三台激光)、第五台激光(与之最近邻只有三台激光)),则可以间接和与其不相邻的激光产生相互作用,继而可以传递相关信息,最终在整个平面型多模激光阵列输出总强度以及各分模式输出强度之间实现混沌和混沌同步。

如果按线性代数中行列式的知识,考虑那九台激光在二维  $3 \times 3$  平面型多模激光阵列中的布局安排,可以发现,那么处于  $3 \times 3$  行列式的次对角线或者是与次对角线平行的位置上的配对激光对(第2(4)台,第3(7)台,第6(8)台激光)恰好实现了输出强度(包含总强度和对应该模式的强度)的混沌同步。而且可以沿着这条思路,把该平面型多模激光阵列扩展到  $4 \times 4, \dots$ , 直至二维平面型  $N \times N$  多模激光阵列的情况,不难得出下列结论:只要选取合适激光参数和调节好实验设备,那些该激光阵列次对角线或与其平行的对角线相应位置上的配对激光对同样可以实现输出总强度和各个对应模式输出强度的混沌和混沌同步,如此一来,便顺利的把原有线性单模和多模激光阵列推广到可以传输二维点阵形式信息的平面型多模激光阵列。一旦该激光阵列能够实现,激光阵列实际使用效率可以得到

有效地提高,就可以克服在线性单模激光阵列中难以迅速、高效、安全、准确的传递大容量平面信息的不足和缺陷,为二维平面型信息的保密传输提供可能。

通过计算该激光阵列输出总强度和各分模式强度相应的功率谱和整个激光系统的李雅普诺夫指数,笔者发现,平面阵列的多模激光系统的工作状态是处于李雅普诺夫指数大于零的混沌区域的。相对于单模平面型阵列的激光系统来说,这里的满足李雅普诺夫指数大于零条件的混沌状态区域更小,这就对实验条件和激光参数的设置提出了更高的要求,但同时对比其能获得更好的保密性和安全性来说,还是值得的。

## 参考文献

- [1] Roy R, Thornburg, Jr K S. Experimental synchronization of chaotic lasers [J]. Phys Rev Lett, 1994, 72 (13): 2009–2012.
- [2] Colet P, Roy R. Digital communication with synchronized chaotic lasers [J]. Opt Lett, 1994, 19 (24): 2056–2058.
- [3] Alsing P M, Gavrielides A, Kovanis V, et al. Encoding and decoding messages with chaotic lasers [J]. Phys Rev E, 1997, 56 (6): 6302–6310.
- [4] Zhou B B, Roy R. Isochronal synchrony and bidirectional communication with delay-coupled nonlinear oscillators [J]. Phys Rev E, 2007, 75 (2): 026205.
- [5] Fischer I, Liu Yun, Davis P. Synchronization of chaotic semiconductor laser dynamics on subnanosecond time scales and its potential for chaos communication [J]. Phys Rev A, 2000, 62 (1): 011801.
- [6] Cohen A B, Ravoori B, Murphy T, et al. Using Synchronization for Prediction of High-Dimensional Chaotic Dynamics [J]. Phys Rev Lett, 2008, 101 (15): 154102.
- [7] Thornburg, Jr K S, Möller M, et al. Chaos and coherence in coupled lasers [J]. Phys Rev E, 1997, 55 (4): 3865–2869.
- [8] Terry J R, Thornburg, Jr. K S, Deshazer D J, et al. Synchronization of chaos

- in an array of three lasers [ J ] . Phys Rev E, 1999, 59 ( 4 ) : 4036–4043.
- [ 9 ] Erzgrber H, Wiczorek S. Dynamics of two laterally coupled semiconductor lasers: Strong- and weak-coupling theory [ J ] . Phys Rev E, 2008, 78 ( 6 ) : 066201.
- [ 10 ] Zhu S Q, Lü X, Chen X F. General synchronization of chaos in a system of two non-identical lasers [ J ] . Chin Phys, 2000, 9 ( 5 ) : 337–341.
- [ 11 ] Zhu S Q, Luo X Q, Fang J X. Generalized synchronization of phase differences in three lasers [ J ] . Chin Phys Lett, 2001, 18 ( 6 ) : 727–730.
- [ 12 ] Zhu S Q, Fang J X, Luo X Q. Phase locking and chaotic synchronization in an array of three lasers [ J ] . Eur Phys J D, 2002, 18: 123–128.
- [ 13 ] Sun J, Zhu S Q. Synchronization of chaotic intensities and phases in an array of N lasers [ J ] . Commun Theor Phys, 2005, 43 ( 2 ) : 233–239.
- [ 14 ] Ray W, Lam W S, Guzdar P N, et al. Observation of chaotic itinerancy in the light and carrier dynamics of a semiconductor laser with optical feedback [ J ] . Phys Rev E, 2006, 73 ( 2 ) : 026219.
- [ 15 ] Yan S L. Enhancing the relaxation oscillation frequency of a chaotic semiconductor laser transmitter using optical dual-feedback light [ J ] . Optics Communications, 2010, 283: 3305–3309.
- [ 16 ] Tiana-Alsina J, Torrent M C, Rosso O A, et al. Quantifying the statistical complexity of low-frequency fluctuations in semiconductor lasers with optical feedback [ J ] . Phys Rev A, 2010, 82 ( 1 ) : 013819.
- [ 17 ] Viktorov E A, Mandel P. Synchronization of two unidirectionally coupled multimode semiconductor lasers [ J ] . Phys Rev A, 2001, 65 ( 1 ) : 015801.
- [ 18 ] Mirasso C R, Kolesik M, Matus M, et al. Synchronization and multimode dynamics of mutually coupled semiconductor lasers [ J ] . Phys Rev A, 2001, 65 ( 1 ) : 013805.

- [ 19 ] Buldu J M, Garcia-Ojalvo J, Terrent M C. Demultiplexing chaos from multimode semiconductor lasers [ J ] . IEEE Journal of Quantum Electronics, 2005, 41 ( 2 ) : 164–170.
- [ 20 ] McAllister R, Meucci R, Deshazer D, et al. Competition between two frequencies for phase synchronization of a chaotic laser [ J ] . Phys Rev E, 2003, 67 ( 1 ) : 015202.
- [ 21 ] Posadas-Castillo C, López-Gutiérrez R M, Cruz-Hernández. Synchronization of chaotic solid-state Nd: YAG lasers: Application to secure communication [ J ] . Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008, 13: 1655–1667.
- [ 22 ] Sun J, Zhu S Q. Chaotic synchronization of intensities and phases in two multi-mode laser fields [ J ] . Chinese Journal of Quantum Electronics, 2005, 22 ( 5 ) : 743–748.
- [ 23 ] Wu L, Zhu S Q. Communications using multi-mode laser system based on chaotic synchronization [ J ] . Chin Phys, 2003, 12 ( 3 ) : 300–304.
- [ 24 ] Wu L, Zhu S Q. Multichannel communication using chaotic synchronization of multi-mode lasers [ J ] . Phys Lett A, 2003, 308: 157–161.
- [ 25 ] Rogister F, Thornburg, Jr K S, Fabiny L, Möller M, et al. Power-Law Spatial Correlations in Arrays of Locally Coupled Lasers [ J ] . Phys Rev Lett, 2004, 92 ( 9 ) : 093905.
- [ 26 ] Rogister F, Roy R. Spatiotemporal Chaos Synchronization in a Large Array of Locally Coupled Nonidentical Lasers [ J ] . Laser Physics, 2005, 15 ( 2 ) : 313–319.
- [ 27 ] Sun J, Pan T, Xu G D. Spatiotemporal Chaos Synchronization in two-dimensional lattice arrays of locally coupled lasers [ J ] . Chinese Journal of Quantum Electronics, 2009, 26 ( 6 ) : 708–714.
- [ 28 ] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining lyapunov exponents from a time series [ J ] . Physica D, 1985, 16 ( 3 ) : 285–317.