理论数学前沿
2020 年 9 月第 2 卷第 3 期

Sample Analysis on Series and Differential Equations of Standard Tests in Latest Three Years

Gao Xin

Department of Electrical and Computer Engineering, The University of Arizona, Tucson, AZ, USA

Abstract: Combining the problems on infinite series and differential equations of standard tests in latest three years, this paper presents evaluation and analysis on the related multiple choice and free-response questions. We study fast and straightforward solutions, then summarize the ideas on review and tactics on solving these problems.

Key words: Standard tests; Series; Differential equation; Calculus

Received: 2020-06-24; Accepted: 2020-07-06; Published: 2020-07-15

文章引用：高昕．近三年标准化考试“级数与微分方程”样题分析［J］．理论数学前沿，2020，2（3）：71-81.
https://doi.org/10.35534/tms.0203011

近三年标准化考试“级数与微分方程”样题分析

高 昕

美国亚利桑那大学电子与计算机工程系，亚利桑那州图森市

邮箱：xgao1985@email.arizona.edu

摘 要： 本文结合最近三年标准化测试“无穷级数与微分方程”试题，对相应选择题与自由问答题作简要评析，探讨快速直观的求解方法，总结归纳相应的复习思路和解题技巧。

关键词： 标准化考试；级数；微分方程；微积分

收稿日期：2020–06–24；录用日期：2020–07–06；发表日期：2020–07–15

1 引言

级数与微分方程是微积分类教学与标准化考试的核心模块之一［1］［2］

[3]，前者代表高等数学知识体系的综合应用[2][3]，后者则为一元函数微积分学的拓展推广。笔者摘译整理了最近三年 AP 微积分 BC 考试与高等数学竞赛样题[1][2][4]，分析解题思路，并作小结归纳，力求答题简捷明快，为广大师生教学实践与自主学习提供参考[5][6][7][8]。

2　无穷级数：对应法则，直观判断

例 1：（2016 年 AP 微积分 BC 选择第 24 题）以下哪些级数收敛？

I. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$　II. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$　III. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

（A）只有 I　（B）只有 II　（C）只有 III　（D）只有 I 和 II

（E）I，II 和 III

分析：本题考查对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u^n$ 各种审敛法则的理解。I 为 p 级数，$p=3/2>1$，故级数收敛；II 由比值审敛法（达朗贝尔判别法）可知 $\rho=1/3<1$，级数收敛；III 用积分判别法构造 $f(n)=\frac{1}{n\ln n}$，该连续函数在区间[1，+∞）上单调递减，并且 $u_n=f(n)$（$n=2$，3，…），则该级数与广义积分 $\int_2^{+\infty}f(x)\,dx$ 敛散性相同；由积分判别法分析可知该广义积分发散，故 III 发散；只有 I 和 II 收敛，选（D）。

例 2：（2016 年 AP 微积分 BC 选择第 92 题）设 f 为某一正项连续递减函数，若 $\int_2^{+\infty}f(x)\,dx=5$，对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$，以下哪个选项的说法正确？

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=0$　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)<5$

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=5$　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)>5$

（E）$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$发散

分析：用排除法。依题意，判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$收敛，故首先排除（A）和（E）；$5=\int_1^{+\infty}f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}f(\xi)(n+1-n)$，$n<\xi<n+1$，由于 f 为正项连续递减函数，故 $5=\sum_{n=1}^{\infty}f(\xi)<\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$，选（D）。

例 3：（2017 年 AP 微积分 BC 样题第 16 题）以下哪个选项是级数

https://doi.org/10.35534/tms.0203011

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}$的收敛域?

（A）$-4<x<0$　（B）$-4\leqslant x<0$　（C）$-2<x<2$　（D）$-2\leqslant x<2$

分析：本题用收敛域的一般判别法，考察端点时需谨慎。由级数收敛可知$|\frac{x+2}{2}|<1$，解得$-4<x<0$；对左右端点，$x=-4$时，交错级数$(-1)^n$的部分和发散，而$x=0$时级数发散；故收敛域为$-4<x<0$，选（A）。

例 4：（2017 年 AP 微积分 BC 样题第 90 题）若无穷级数$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$可用$P_k=\sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$来近似，对确保$|S-P_k|<\frac{3}{100}$的交错级数误差限，$k$的最小值是多少?

（A）64　（B）66　（C）68　（D）70

分析：本题考查交错级数部分和与余项的概念，可以直接用交错级数的误差估计式讨论。若用观察法，注意到$3/100=1/33.3\cdots$，$2/67=1/33.5<3/100$，当$k=66$时，后面的余项均比$3/100$小，余项中绝对值最大的第一项用$2/67$即可保证$|S-P_k|<\frac{3}{100}$，故$k=66$，选（B）。

备注: 求解级数选择题时,保持概念清晰,找准对应法则,再结合赋值、排除、例证等破题思路，可在较短时间内直观找出答案。学生在复习中应注意知识点查漏补缺，熟记级数的基本公式和一般判别法。

例 5：［2018 年大学生数学竞赛（非数学专业）决赛第八题］设$0<a_n<1$，$n=1,\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}=q$（有限或$+\infty$）。（1）试证$q>1$时级数收敛，$q<1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散；（2）讨论$q=1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛性并阐述理由。

分析：本题考查级数敛散性的几个判别准则，以及常用级数（p级数、调和级数等）的敛散性性质。

证明：（1）若$q>1$，则$\exists p\in\mathrm{R}$，s.t.$q>p>1$. 依题设，根据极限性质$\exists N\in\mathrm{Z}^*$，s.t. $\forall n>N$，$\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}>p$，即$a_n<\frac{1}{n^p}$；由$p$级数性质可知当$p>1$时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，由比较判别法则可知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。若$q<1$，则$\exists p\in\mathrm{R}$，s.t.$q<r<1$. 类似地，$\exists N\in\mathrm{Z}^*$，s.t. $\forall n>N$，$\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}<r$，即$a_n<\frac{1}{n^r}$；当$r<1$时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}$发散，由

比较判别法则可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

（2）当 q=1 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性不确定。举例如下：

令 $a_n=\frac{1}{n}$，满足题设条件，但调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散；$a_n=\frac{1}{n\,(\ln n)^2}$ 同样满足条件，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(\ln n)^2}$ 收敛。

例 6：（2018 年 AP 微积分 BC 自由问答第六题）ln（1+x）的麦克劳林级数展开式为：$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\mathrm{L}+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots$. 在其收敛域内，该级数收敛于 ln(1+$x$)。定义函数 $f(x)=x\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)$。求：（a）函数 f 的麦克劳林级数前四个非零项及通项公式；（b）试确定 f 的麦克劳林级数收敛域，推导过程并解答；（c）记 $P_4(x)$ 为 f 关于 x=0 的四阶泰勒展开。利用交错级数误差限，分析并推出 $|P_4(2)-f(2)|$ 的上界。

分析：本题考查高阶导数运用、级数收敛域、基本级数通项表达式及其误差限等概念，参考 AP 微积分真题的自由问答第六题，可知历年考查无穷级数的题型均有类似之处，掌握基本方法，演算就较为直接。

解：（a）利用题设中对数函数展开式，将 x 换为 $\frac{x}{3}$ 可得，

$$f(x)=\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^3-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^4+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}x^n$$，进而有：$x\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 3^n}x^{n+1}$.

因此，函数 f（x）的麦克劳林级数展开式为：

$\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{2\times 3^2}+\frac{x^4}{3\times 3^3}-\frac{x^5}{4\times 3^4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n\times 3^n}+\cdots$；故前四个非零项为：$\frac{x^2}{3}$，$-\frac{x^3}{18}$，$\frac{x^4}{81}$，$-\frac{x^5}{324}$，通项 $a_n=(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n\times 3^n}$.

（b）由定义可知 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{x}{3}\right|<1$，$-3<x<3$；考察左右端点，$x$=−3 时级数发散，$x$=3 时（交错）级数收敛，故 f 的麦克劳林级数收敛域为 $(-3,3]$.

（c）$\xi=2\in(-3,3]$，交错级数误差限为：

https://doi.org/10.35534/tms.0203011

$|R_4(2)|=|P_4(2)-f(2)|\leqslant|a_5|=\left|\dfrac{(-1)^6\times 2^6}{5\times 3^5}\right|\approx 0.053.$

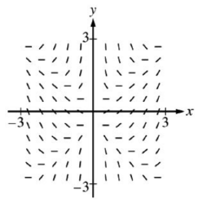
小结：掌握级数基本性质、敛散性常用判别法以及幂级数近似法则，熟记级数运算的几个重要公式，再辅以相当数量习题演练，可以逐步达到融会贯通的效果。

3　微分方程：题型归类，数形结合

例 7：（2016 年 AP 微积分 BC 选择第 13 题）下图中的斜率场，代表以下哪个微分方程模型?

（A）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-y^2}{x}$　（B）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-y^2}{y}$　（C）$\dfrac{dy}{dx}=x^2-y^2$

（D）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{x}$　（E）$\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$



分析：本题考查斜率场基本概念和对函数图形的推理判断能力。考查过原点、斜率为 ±1 的两条直线，线上各点一阶导数均为 0，因此排除选项（D）和（E）。再观察横轴上的斜率场，正半轴为正，负半轴为负，且越远离纵轴斜率越陡，此时 y=0，可排除选项（B）和（C），故（A）正确。

例 8：（2016 年 AP 微积分 BC 选择第 91 题）在某校中曾听说过某谣言的学生数目随时间 t（小时）的变化，可以用函数 P 来建立逻辑斯蒂微分方程模型。在中午 12 点时，该校 500 位学生中有 50 位已听说了此谣言，并且此时函数 P 以每小时 20 位学生的速率增长。以下哪个数学表达式为对应的逻辑斯蒂微分方程?

（A）$\dfrac{dp}{dt}=\dfrac{1}{1125}P(500-P)$　（B）$\dfrac{dp}{dt}=\dfrac{1}{480}P(500-P)$　（C）$\dfrac{dp}{dt}=\dfrac{1}{192}P(500-P)$

（D）$\dfrac{dp}{dt}=\dfrac{2}{45}P(500-P)$　（E）$\dfrac{dp}{dt}=\dfrac{5}{48}P(500-P)$

分析：本题考查逻辑斯蒂微分方程的基本模型。在中午 12 点的初始时刻 t=0，$P(0)=50$，$\left.\dfrac{dp}{dt}\right|_{t=0}=20$. 由逻辑斯蒂微分方程的一般形式：$\dfrac{dp}{dt}=kP\left(1-\dfrac{P}{K}\right)=\dfrac{P(K-P)}{K_0}$（令 $K_0=K/k$），可知 K=500，将两个初始条件带入微分方程，求得 K_0=1125，故选项（A）正确。

例 9：（2017 年 AP 微积分 BC 自由问答第四题）在初始时刻 t=0 时，从烤箱托盘中取出一只烤熟的红薯，放在厨房里冷却。红薯内部温度在 t=0 时为 91 摄氏度（℃），并且红薯内部温度在任意 t>0 时均高于 27℃。红薯内部在 t 分钟时的温度值，可以建立为函数 H（t）模型，其满足微分方程$\frac{dH}{dt}=-\frac{1}{4}$（$H$–27），用摄氏温度来衡量 H（t），初始 H（0）=91。

（a）写出函数 H（t）在 t=0 时的切线方程，并用该方程来近似表示在 t=3 时的红薯内部温度。

（b）用 H（t）的二阶导数$\frac{d^2H}{dt^2}$来确定（a）中的答案，是高估还是低估了 t=3 时的红薯内部温度。

（c）在 10 分钟以内，红薯在 t 分钟时的内部温度的替代模型，可以用函数 G（t）来表达，对应的微分方程为$\frac{dG}{dt}=-$（G–27）$^{2/3}$，用摄氏温度来衡量 G（t），初始 G（0）=91. 写出 G（t）的表达式。基于该函数模型，试求 t=3 时的红薯内部温度。

分析：本题（a）问考查一阶导数的几何意义，（b）问考查二阶导数的基本性质及函数凹凸性判断的应用，（c）问则重点考查求解微分方程中的分离变量法。对各阶导数的概念清晰，计算细心（特别注意复合函数的链式求导法则），即可轻松解答前两问；对分离变量法的求解，应牢记两个要点——分离变量与积分常数，按部就班完成推导求解并验证初始值，避免遗漏各个分题中的问答要求，从而圆满完成答题任务。

解：（a）对函数 H（t），初始时刻 H（0）=91，一阶导数 H'（0）$=\left.\frac{dH}{dt}\right|_{t=0}=-\frac{1}{4}$（91–27）=–16，故函数 H（t）在 t=0 时的切线方程可表示为 y–91=–16（t–0），即 $y=-16t+91$.

在 t=3 时，该方程所近似的红薯内部温度 H（3）=–16 × 3+91=43（℃）。

（b）$\frac{d^2H}{dt^2}=-\frac{1}{4}\frac{dH}{dt}=\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)(H-27)=\frac{1}{16}(H-27)$，由于任意 t>0 时，H（t）>27，故$\frac{d^2H}{dt^2}$>0 恒成立，由二阶导数凹凸性判定可知 t>0 时，H（t）为上凹的函数；因此，（a）中的答案低估了实际的红薯内部温度。

https://doi.org/10.35534/tms.0203011

（c）对函数 $G(t)$ 所对应的微分方程，分离变量可得 $\frac{dG}{(G-27)^{2/3}}=-dt$，等式两边积分，$\int\frac{dG}{(G-27)^{2/3}}=\int(-1)\,dt$，$3(G-27)^{1/3}=-t+C$，由于 $G(0)=91$，$3(91-27)^{1/3}=-0+C$，$C=12$。由 $3(G-27)^{1/3}=12-t$ 整理可得：$G(t)=27+(\frac{12-t}{3})^3$，$0\leqslant t<10$. 当 $t=3$ 时，基于函数 $G(t)$ 的红薯内部温度为 $27+(\frac{12-3}{3})^3=54$（℃）。

例 10：（2017 年 AP 微积分 BC 样题第四题）考察微分方程 $\frac{dy}{dx}=-1+\frac{y^2}{x}$.

（a）推导验证 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2y^3-y^2-2xy}{x^2}$。

（b）记 $y=g(x)$ 为微分方程 $\frac{dy}{dx}=-1+\frac{y^2}{x}$ 在初始条件 $g(4)=2$ 时对应的特解。在 $x=4$ 处，函数 g 是否有相对最小值、相对最大值，或是二者皆无？证明你的结论。

（c）记 $y=h(x)$ 为微分方程 $\frac{dy}{dx}=-1+\frac{y^2}{x}$ 在初始条件 $h(1)=2$ 时对应的特解。求函数 h 在 $x=1$ 时的二阶泰勒多项式。

（d）对于（c）中给出的函数 h，已知在区间［0.9，1.1］内，任意 x 均满足 $|h'(x)|\leqslant 60$。用 A 来表示在（c）中用二阶泰勒多项式在在 $x=1$ 时对 $h(1.1)$ 的近似。用拉格朗日误差界来表示 A 与 $h(1.1)$ 的差值不超过 0.01.

分析：本题具有较强综合性，考查函数极值、高阶导数、泰勒展开与微分方程等模块中的基本概念，侧重知识连贯运用；解答前三问时应注意运算细心，推导正确，最后一问则需要对拉格朗日误差界明晰理解。

解：（*a*）由商的求导法则，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2y\frac{dy}{dx}x-y^2\times 1}{x^2}=\frac{2xy(-1+y^2/x)-y^2}{x^2}=\frac{2y^3-y^2-2xy}{x^2}$，命题得证。

（b）$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,\ y)=(4,\ 2)}=-1+\frac{2^2}{4}=0$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(x,\ y)=(4,\ 2)}=\frac{2\times 2^3-2^2-2\times 4\times 2}{4^2}=-\frac{1}{4}<0$. 由二阶导数验证结论可知，在 $x=4$ 处，函数 g 具有相对最大值。

（c）$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,\ y)=(1,\ 2)}=-1+\frac{2^2}{1}=3$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{(x,\ y)=(1,\ 2)}=\frac{2\times 2^3-2^2-2\times 1\times 2}{1^2}=8$. 函数 h 在 $x=1$ 时二阶泰勒多项式为：

$T_2(x)=2+3(x-1)+\frac{8}{2!}(x-1)^2=2+3(x-1)+4(x-1)^2$.

（d）记 $\xi \in [0.9, 1.1]$，拉格朗日误差界 $|R_2(\xi)|=|h(1.1)-A| \leqslant \dfrac{\max\limits_{0.9\leqslant x\leqslant 1.1}|h'''(x)|\,|(1.1-1.0)^3|}{3!}=\dfrac{60}{6}\times\dfrac{1}{1000}=0.01.$

小结：微分方程部分的题型千变万化，但基本方法万变不离其宗。正确的推导应建立在透彻理解求导运算、导函数性质等基本概念的基础上，利用数形结合、赋值验证等方法可以提高解决问题的效率；分离变量法求解则是 AP 微积分 BC 测试中的高频考点；在微积分类的标准化考试复习中注意知识系统化、网络化，教学实践中引导学生注重思考与归纳，是深刻理解微积分思想、训练思维方法、完善数学素养的关键所在。

4　级数与方程：浅谈教学方案、复习思路与备考策略

在高等数学教学中，级数与微分方程是重要知识模块代表［1］［2］［3］。教师在自主备课、制定教学计划时，应结合实际教学进度，紧扣考试大纲要求，因材施教，授人以渔。对这部分知识有需求的教学对象可分为三类：一是国际高中应届参加 AP 微积分 BC 标准化考试的学生；二是高等院校理工科大一下学期教学班及大四考研班的学生；三是高等数学竞赛辅导班及辅修数学类专业课的学生。教学无固定模式，但课程侧重点应围绕教学效果来组织，兼顾学生复习备考需要。笔者结合亲身实践经历［5］［6］［7］［8］，对课时规划和教学方案择要讨论如下：

AP 微积分 BC 是高中数学与大学双语微积分的衔接课，参照级数与微分方程考纲，对应的试题难度与知识点覆盖，对高等数学的知识要求最少也最浅显（多元函数不考），远低于同等学力课程结业及考研数学大纲中的要求；理工科大学生数学竞赛（非数学专业）是对高等数学教学的延伸与拓展，在同等知识广度基础上，增加对解题技巧的测试。为此，同样以级数与微分方程为知识交集，针对 AP 微积分 BC 教学设计，应首先帮助学生做好预备课：梳理数列、导数、微分等高中数学知识点，强化复习一元函数微积分内容，为级数和微分方程的课时储备双语词汇；再引导学生预习、自学对应高等数学内容，进而梳理知识

https://doi.org/10.35534/tms.0203011

结构、归纳基本公式和解题方法，并辅以适量真题训练，考前限时模拟自测。

针对高数辅导与考研复习，教师应帮助学生熟悉知识点，清晰记忆高频考点对应题型，纲举目张，逐渐形成知识网络，答题演练中完善解题方法和技巧[2][3]。例如无穷级数的常考题型，一般包括常数项级数敛散性与求和，幂级数收敛半径和收敛域，幂级数展开与求和以及傅里叶级数；对于幂级数的重点要求，学生应通过一定量训练，具备如下能力：给定某一幂级数，既能准确计算其收敛半径、收敛域以及和函数，也能将一个简单函数在指定点展开成幂级数。对微分方程的复习，应是不仅能识别考纲中的各种方程类型，熟悉对应求解步骤，还应有意识地培养学生结合几何或物理背景，对应用问题作微分方程建模的能力[9]。

高等数学竞赛是对学有余力大一新生的再选拔，而开展竞赛辅导讲座也是交互训练数学思维的有效渠道[4]。仔细阅读竞赛大纲，级数和常微分方程考点与许多高数教材的相应章节非常贴近，但竞赛试题难度，往往会有一定起伏性，增加对思维深度及运算复杂度的考量。复习时不仅需要积累对题干的阅读能力，更需要较为扎实的数学基本功。大量的重复训练可能会事倍功半，而习惯思路的“套题”反射，对提升解题技巧治标不治本。建议学生选定一本配套的竞赛综合教辅为主要资料，辅以若干套真题和相关数学杂志作课外读物，在阅读观摩时不断总结，在解决难题的过程中自我激励、知难而进、探索求真，体会高等数学思想在自然领域中的科学魅力[8][9]。

论文枚举级数与微分方程样题，可作为 AP 微积分 BC 相关知识模块的综合资料；笔者为各题解答所提供的分析备注，可供学生平时自学及课外复习时参考；摘选例 5 虽为竞赛试题，却渗透着基本的级数概念与判别准则，更从侧面反映竞赛并非遥不可及，只要持之以恒钻研，学习方法对路，就能不断积累进步。

如果将高等数学题库比作浩瀚星空，那么近三年的级数与微分方程标准化样题，就是一架多棱观景望远镜：在微分运算中，我们扩大视野，透析考点；在积分运算中，我们持久投入，聚沙成塔；严谨对待级数通项表达，因为我们深知“差之毫厘，谬以千里”；随机切换于点线面，数表与空间内，在常量、

变量、误差限之间自由游弋，更需具备灵活思维；对微分方程的初始条件我们无法改变，只能不断调整焦距，适应现实，遵循分离变量、判别条件和积分常数等一系列准则，在单调的样题评析中，努力追寻函数世界的凹凸性，演绎并记录泰勒公式和拉格朗日余项，实时跟踪麦克劳林展开的别样精彩！

参考文献

[1] 考天下学习网．AP 微积分（BC）30 天速成真经［M］．北京：中国石化出版社，2013．4．

[2] Varberg D，Purcell E J，Rigdon S E．微积分（英文版·原书第 9 版）［M］．北京：机械工业出版社，2015．7．

[3] 同济大学应用数学系．高等数学（下册）［M］．第五版．北京：高等教育出版社，2003．

[4] 第九届决赛试卷及答案［EB/OL］．（2018-03-26）．http://www.cmathc.cn/article/110.html.

[5] 高昕．一元函数微分学解题策略初探［J］．高等数学研究，2018，21（5）：8-13．

[6] 高昕．简析一元函数积分的解题策略与技巧［J］．高等数学研究，2019，22（6）：20-24．

[7] 高昕．极限运算和求导错解分析［J］．数学学习与研究，2019，3：3．

[8] 高昕．最是书香能致远——记我在美国的恩师凯弗教授［J］．新东方英语（大学版），2015，2：63-65．

[9] 汪晓虹．高等数学实验——学软件 做数学［M］．北京：国防工业出版社，2010．3．