

The Study of the Size Matching Characteristics for Diaphragm Ring Piezoelectric Oscillator

Tian Xiaochao^{1*} Wen Ren Kaiqi¹ Xu Anjun¹ Zhang Daizhi¹
Shen Yanhu²

1. College of Machinery and Vehicle Engineering, Changchun University, Changchun;
2. College of Biology and Agricultural Engineering, Jilin University, Changchun

Abstract: To solve the problem of size matching to diaphragm ring piezoelectric vibrator, we analyzed the diaphragm ring piezoelectric vibrator by Rayleigh energy method and elastic mechanics this way. We supposed the variable is the diameter ratio and thickness ratio of piezoelectric ceramic plate and metal substrate. Then analyzed the relationship between the structural of size matching and the performance of piezoelectric vibrator, and optimized the structure of piezoelectric vibrator. The result shows that there is the better overall performance. That is for the piezoelectric vibrator, there is the larger output power, the large output force, the large displacement and higher effective electromechanical coupling coefficient. When the diameter ratio is between 0.5 and 0.8 and the thickness ratio is between 0.6 and 0.8. Selected the diameter ratio of 0.65 and the thickness ratio of 0.71 to experimental testing. The maximum displacement is 23 microns of the central resonance point are proved by theory analysis. The performance is good and the size matching of this structure is match the range of theoretical analysis. The theoretical approach mentioned in this

paper provides theoretical basis and technical reference for the design and application of diaphragm ring piezoelectric vibrator.

Key words: Piezoelectric drive; Piezoelectric oscillator; Rayleigh energy method; Elasticity; Resonance

Received: 2019-07-26; Accepted: 2019-08-19; Published: 2019-09-05

膜片式环形压电振子尺寸匹配特性研究

田晓超^{1*} 闻人锳琦¹ 徐安俊¹ 张代治¹ 沈燕虎²

1. 长春大学机械与车辆工程学院, 长春;

2. 吉林大学生物与农业工程学院, 长春

邮箱: tianxczb@163.com

摘 要: 针对膜片式环形压电振子结构尺寸匹配问题, 本文采用瑞利能量法和弹性力学方法对膜片式环形压电振子进行理论分析。以压电陶瓷晶片与金属基板的直径比和厚度比为变量, 分析了这种压电振子的结构尺寸匹配对其性能的影响关系, 进而对压电振子进行结构优化。结果表明, 直径比在 0.5 ~ 0.8 之间、厚度比在 0.6 ~ 0.8 之间的压电振子可获得较好的综合性能: 输出功率大、输出力大、位移较大且有效机电耦合系数较高。选取直径比为 0.65、厚度比为 0.71 的压电振子进行实验测试, 共振点处中心点唯一最大为 23 μm , 性能较好, 表明该结构尺寸匹配正处于理论分析范围内。为膜片式环形压电振子的设计与应用提供了理论依据和技术参考。

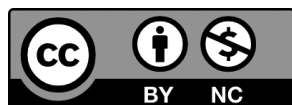
关键词：压电驱动；压电振子；瑞利能量法；弹性力学；共振

收稿日期：2019-07-26；录用日期：2019-08-19；发表日期：2019-09-05

Copyright © 2019 by author(s) and SciScan Publishing Limited.

This article is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



1 引言

由压电材料构成的压电振子是近代发展并逐步完善的新型驱动器之一。近年来，压电振子的性能获得了很大的提高。压电振子具有控制精度高、速度快、体积小、无磁干扰等特点，变形精度可以达到微米级或纳米级，常被作为高速、高精度的驱动源使用 [1] [2]。目前压电振子的工作机理、结构以及应用技术引起国内外研究人员的广泛关注。

美国 Smits 最先提出了压电振子的静态本构方程，并对其进行了相关的振动分析 [3]。美国 Dobruki 和 Christopher 等人 [4] [5] 利用有限元法对对称形式的压电振子以及周边固定支承和简支边界的压电振子进行了动态和静态分析，同时推导出了相应的数学表达式。李丹 [6] 等人利用 ANSYS 软件模拟了三叠片换能器振动模态，并进行了谐响应分析。孙晓峰等人 [8] 利用弹性薄板小挠度理论对圆形双晶片压电振子进行了分析，推导出了周边固定支撑方式的压电振子弯曲振动方程。彭太江等人 [9] 对单晶片压电振子进行了理论推导和数值分析，得到增大压电振子振动位移的方法。李东明等人 [10] 对矩形压电振子的位移输出进行了分析，利用本构方程推导出了中间有金属材料矩形压电振子的位移表达式。吕航等人 [11] [12] 利用 Ansys 软件对矩形压电振子模态分析，

得到模态频率与尺寸参数的关系和变化规律,为矩形压电振子的优化设计提供了理论依据。龚立娇、曲绍鹏等人 [13] [14] [15] 给出了复合板式的矩形压电振子共振频率的表达式,计算分析出了固有频率与几何尺寸之间的关系,并与模态分析值对比,验证了理论分析的正确性。

本文采用瑞利能量法和弹性力学方法对膜片式环形压电振子进行理论分析,优化环形压电振子的结构尺寸,为环形压电振子的设计与应用提供理论依据和技术参考。

2 压电振子尺寸与分布函数设定

压电振子结构尺寸设定如图 1 所示,压电振子总厚度为 h ,金属基板厚度为 $m=\alpha h$,金属基板半径为 a ,压电陶瓷晶片厚度为 $\frac{1}{2}(h-m)$,半径为 βa ,基准平面为 $\frac{h}{2}$;压电陶瓷片中间孔半径为 b ,基板中间孔半径为 δb 。

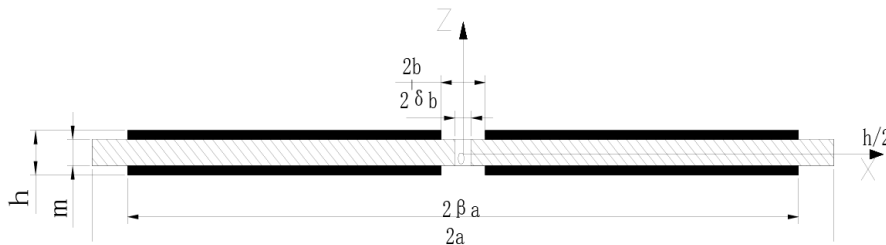


图 1 环形压电振子尺寸设定示意图

Figure 1 Diagram of size setting of ring piezoelectric oscillator

环形压电振子为简谐激励振动,采用极坐标位移分布函数,设

$$w(r) = \xi \left[a_0 + a_1 \frac{r}{a} + a_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + a_3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 + a_4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 + a_5 \left(\frac{r}{a} \right)^5 \dots \right] \quad (1)$$

式中, $w(r)$ 为环形压电振子的法向位移, r 为径向坐标; a 为金属基板的半径, a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 、 $a_5 \dots$ 为待定常数; ξ 为位移因子,它是驱动电压的函数。压电振子周边固定支撑,有 $\frac{dw}{dr} \Big|_{r=0} = 0$, 故 $a_1 = 0$ 。方程取前 5 阶就可以满足精度要求,故式 (1) 可写成

$$w(r) = \xi \left[a_0 + a_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + a_3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 + a_4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 + a_5 \left(\frac{r}{a} \right)^5 \right] \quad (2)$$

由于压电振子做简谐振动, 有 $\xi = \xi_0 e^{j\omega t}$, 则

$$w(r) = \xi \left[a_0 + a_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + a_3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 + a_4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 + a_5 \left(\frac{r}{a} \right)^5 \right] e^{j\omega t} \quad (3)$$

则

$$\dot{w}(r) = j\omega t(r) = \dot{\xi} \left[a_0 + a_2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + a_3 \left(\frac{r}{a} \right)^3 + a_4 \left(\frac{r}{a} \right)^4 + a_5 \left(\frac{r}{a} \right)^5 \right] \quad (4)$$

其中 $\dot{\xi} = \xi_0 e^{j\omega t} j\omega$ 。

3 环形压电振子动能与位能

3.1 环形压电振子动能

整个压电振子的动能等于圆形状态下具有的动能除去中间孔具有的动能, 设金属基板和压电陶瓷片的密度为 ρ_m 和 ρ_c , 则环形压电振子的动能为

$$\begin{aligned} T_p = & \frac{1}{2} \left\{ \int_0^a \int_{-m/2}^{m/2} \rho_m \dot{w}^2(r) 2\pi r dr dz - \int_0^{\delta b} \int_{-m/2}^{m/2} \rho_m \dot{w}^2(r) 2\pi r dr dz \right. \\ & \left. + 2 \int_0^{\beta a} \int_{m/2}^{h/2} \rho_c \dot{w}^2(r) 2\pi r dr dz - 2 \int_0^b \int_{m/2}^{h/2} \rho_c \dot{w}^2(r) 2\pi r dr dz \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

由于中间孔具有的能量远小于整个压电振子的能量, 对总能量影响较小, 可将其忽略, 该式可写成

$$\begin{aligned} T_p = & \frac{1}{2} \left\{ \int_0^a \int_{-m/2}^{m/2} \rho_m \dot{w}^2(r) 2\pi r dr dz + 2 \int_0^{\beta a} \int_{m/2}^{h/2} \rho_c \dot{w}^2(r) 2\pi r dr dz \right\} \\ = & \pi \left[\rho_m m \int_0^a \dot{w}^2(r) r dr + \rho_c (h-m) \int_0^{\beta a} \dot{w}^2(r) r dr \right] \quad (6) \end{aligned}$$

将式(4)带入式(6)得

$$T_p = \pi \dot{\xi}^2 \left[\rho_m m K_1 + \rho_c (h-m) K_2 \right] \frac{a^2}{2} = \frac{\pi \dot{\xi}^2 K_p h a^2}{2} \quad (7)$$

式中, $K_p = \rho_m \alpha K_1 + \rho_c (1-\alpha) K_2$, K_1 、 K_2 为动能因子, 有

$$\begin{aligned} K_1 = & a_0^2 + a_0 a_2 + \frac{1}{3} a_2^2 + \frac{4}{5} a_0 a_3 + \frac{4}{7} a_2 a_3 + \frac{1}{4} a_3^2 + \frac{2}{3} a_0 a_4 + \frac{1}{2} a_2 a_4 + \frac{4}{9} a_3 a_4 + \frac{1}{5} a_4^2 + \frac{4}{7} a_0 a_5 \\ & + \frac{4}{9} a_2 a_5 + \frac{1}{5} a_3 a_5 + \frac{1}{11} a_4 a_5 + \frac{1}{6} a_5^2 \quad (8) \end{aligned}$$

$$K_2 = a_0^2 \beta^2 + a_0 a_2 \beta^4 + \frac{1}{3} a_2^2 \beta^6 + \frac{4}{5} a_0 a_3 \beta^5 + \frac{4}{7} a_2 a_3 \beta^7 + \frac{1}{4} a_3^2 \beta^8 + \frac{2}{3} a_0 a_4 \beta^6 + \frac{1}{2} a_2 a_4 \beta^8 \\ + \frac{4}{9} a_3 a_4 \beta^9 + \frac{1}{5} a_4^2 \beta^{10} + \frac{4}{7} a_0 a_5 \beta^8 + \frac{4}{9} a_2 a_5 \beta^9 + \frac{1}{5} a_3 a_5 \beta^{10} + \frac{4}{11} a_4 a_5 \beta^{11} + \frac{1}{6} a_5^2 \beta^{12} \quad (9)$$

3.2 环形压电振子位能

3.2.1 金属基板位能

因基板的厚度远小于其直径,基板的振动位移远小于其厚度,可忽略金属基板其它方向的变形和应力;中法线在变形后仍为中法线。应力和应变的关系为。

$$T_1 = \frac{Y_m}{(1 - \sigma_m^2)} \left(\frac{z}{R_1} + \sigma_m \frac{z}{R_2} \right) \quad (10)$$

$$T_2 = \frac{Y_m}{(1 - \sigma_m^2)} \left(\frac{z}{R_2} + \sigma_m \frac{z}{R_1} \right) \quad (11)$$

式中, Y_m 和 σ_m 分别为金属基板材料的杨氏模量和泊松系数。 R_1 、 R_2 分别为曲率半径。

则单位体积中所存储的位能为

$$U_{UV} = \frac{1}{2} (T_1 S_1 + T_2 S_2) = \frac{Y_m}{2(1 - \sigma_m^2)} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{2\sigma_m}{R_1 R_2} \right) z^2 \quad (12)$$

沿厚度方向积分,得金属基板纯弯曲情况下单位面积中具有位能为

$$U_{UV} = \frac{Y_m}{2(1 - \sigma_m^2)} \int_{-m/2}^{m/2} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{2\sigma_m}{R_1 R_2} \right) z^2 dz = \frac{Y_m m^3}{24(1 - \sigma_m^2)} \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{2\sigma_m}{R_1 R_2} \right) \quad (13)$$

当圆形板弯曲后,板上某一点所产生的法向位移为 w ,在弯曲角度很小的情况下,有

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d^2 w}{r^2} / \left[1 + \left(\frac{dw}{r} \right)^2 \right]^{3/2} \approx \frac{d^2 w}{dr^2} \quad (14)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \quad (15)$$

将式(2)、式(14)和式(15)代入式(12)得

到金属基板总位能

$$U_m = 2\pi \int_0^a U_{UV} r dr = \frac{2\pi}{3} \frac{Y_m m^3 \xi^2}{(1 - \sigma_m^2) a^2} \Lambda_m \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned}\Lambda_m = & \frac{1+\sigma_m}{2} a_2^2 + \frac{3}{2} (1+\sigma_m) a_2 a_3 + \frac{1}{8} \left(\frac{45}{4} + 9\sigma_m \right) a_3^2 + 2 (1+\sigma_m) a_2 a_4 \\ & + \left(\frac{21}{5} + 3\sigma_m \right) a_3 a_4 + \left(\frac{10}{3} + 2\sigma_m \right) a_2 a_5 + \left(\frac{19}{6} + 3\sigma_m \right) a_3 a_5 + \left(\frac{36}{7} + 5\sigma_m \right) a_4 a_5 \\ & + \left(\frac{17}{4} + 3\sigma_m \right) a_5^2\end{aligned}\quad (17)$$

3.2.2 压电陶瓷片位能

压电陶瓷方程式

$$T_1 = \frac{Y^D}{1 - (\sigma^D)^2} (S_1 + \sigma^D S_2) - \frac{g_{31} Y^D}{1 - \sigma^D} D_3 \quad (18)$$

$$T_2 = \frac{Y^D}{1 - (\sigma^D)^2} (S_2 + \sigma^D S_1) - \frac{g_{31} Y^D}{1 - \sigma^D} D_3 \quad (19)$$

$$E_3 = -g_{31} (T_1 + T_2) + \beta_{33}^T D_3 \quad (20)$$

式中, T_1 、 S_1 是 r 方向的应力和应变; T_2 、 S_2 是 Q 方向的应力和应变; Y^D 、 σ^D 是压电陶瓷的杨氏模量和泊松系数; E_3 、 D_3 是电场和电位移, 方向沿 z 轴;

β_{33}^T 为沿 z 轴方向的介电常数的倒数。由于压电陶瓷做轴对称振动, 有 $S_1 = z \frac{d^2 w}{dr^2}$, $S_2 = z \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}$ 代入式 (18)、(19), 得到压电陶瓷单位体积的位能为

$$\begin{aligned}U_{UVC} = & \frac{1}{2} (T_1 S_1 + T_2 S_2) = \frac{z^2 Y^D}{2 [1 - (\sigma^D)^2]} \left[\left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{2\sigma^D}{r} \left(\frac{dw}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right) \right] - \frac{g_{31} z Y^D}{2(1 - \sigma^D)} \left[\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{d^2 w}{dr^2} \right] D_3\end{aligned}\quad (21)$$

得到单位面积具有的位能为

$$\begin{aligned}U_{USC} = & 2 \int_{m/2}^{h/2} U_{UVC} dz = \frac{Y^D (h^3 - m^3)}{24 [1 - (\sigma^D)^2]} \left\{ \left[\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{d^2 w}{dr^2} \right]^2 - \frac{2(1 - \sigma^D)}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2 w}{dr^2} \right. \\ & \left. - \frac{3g_{31} (1 + \sigma^D)}{h^3 - m^3} (h^2 - m^2) \left[\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{d^2 w}{dr^2} \right] D_3 \right\}\end{aligned}\quad (22)$$

利用式(22)进行整个积分,得到压电陶瓷片的总位能,令 $D_3=0$,得

$$U_c^D = \frac{2\pi}{3} \frac{Y^D (h^3 - m^3) \xi^2}{[1 - (\sigma^D)^2] a^2} \Lambda_c^D \quad (23)$$

其中, Λ_c^D 为电位移 D 恒定时的位能因子,则

$$\begin{aligned} \Lambda_c^D = & \frac{1+\sigma^D}{2} a_2^2 \beta^2 + \frac{3}{2} (1+\sigma^D) a_2 a_3 \beta^3 + \left[\frac{1}{8} \left(\frac{45}{4} + 9\sigma^D \right) a_3^2 + 2(1+\sigma^D) a_2 a_4 \right] \beta^4 \\ & + \left[\left(\frac{21}{5} + 3\sigma^D \right) a_3 a_4 + \left(\frac{10}{3} + 2\sigma^D \right) a_4^2 \right] \beta^5 + \frac{5(1+\sigma_m)}{2} a_2 a_5 \beta^6 \\ & + \left(\frac{19}{6} + 3\sigma_m \right) a_3 a_5 \beta^7 + \left(\frac{36}{7} + 5\sigma_m \right) a_4 a_5 \beta^8 + \left(\frac{17}{4} + 3\sigma_m \right) a_5^2 \beta^9 \end{aligned} \quad (24)$$

最后得到环形压电振子的总位能

$$\begin{aligned} U^D = & \frac{2\pi}{3} \frac{Y^D (h^3 - m^3) \xi^2}{[1 - (\sigma^D)^2] a^2} \Lambda_c^D + \frac{2\pi}{3} \frac{Y_m m^3 \xi^2}{(1 - \sigma_m^2) a^2} \Lambda_m \\ = & \frac{2}{3} \frac{Y^D h^3 \xi^2}{[1 - (\sigma^D)^2] a^2} \Lambda_{eff}^D \end{aligned} \quad (25)$$

式中, Λ_{eff}^D 为电位移恒定时圆环形压电振子的位能因子

$$\Lambda_{eff}^D = \frac{(h^3 - m^3)}{h^3} \Lambda_c^D + \frac{m^3}{h^3} \frac{Y_m [1 - (\sigma^D)^2]}{Y^D (1 - \sigma_m^2)} \Lambda_m \quad (26)$$

4 位移分布函数系数及频率方程确定

压电振子为周边固定支撑方式,在 $r=a$ 法向位移及挠度斜率为0,有

$$\begin{cases} w(r)|_{r=a} = \xi [a_0 + a_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + a_3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 + a_4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 + a_5 \left(\frac{r}{a}\right)^5] = 0 \\ \frac{dw}{dr}|_{r=a} = \frac{\xi}{a} (2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

由式(27)得到

$$\begin{cases} a_0 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0 \\ 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 0 \end{cases} \quad (28)$$

令 $a_0=1$ 、 $a_2=1$ 则有 $a_4=-8-2a_3$, $a_5=6+a_3$, 根据位能原理 $U_{\max}^D = T_{p\max}$, 得

$$\frac{2}{3} \frac{Y^D h^3}{[1 - (\sigma^D)^2]} \frac{\Lambda_{eff}^D}{a^2} = \frac{\omega^2 a^2}{2} [\rho_m m K_1 + \rho_c (h - m) K_2] \quad (29)$$

上式写成频率函数, 为

$$\omega^2 = \frac{4}{3} \frac{Y^D h^3}{[1 - (\sigma^D)^2]} \frac{\Lambda_{eff}^D}{a^4 [\rho_m m K_1 + \rho_c (h - m) K_2]} = \frac{4}{3} \frac{C_p^2 h^2}{a^4} \frac{\Lambda_{eff}^D}{K_p} \quad (30)$$

式中 $C_p^2 = \frac{Y^D}{[\rho_m \frac{m}{h} + \rho_c (1 - \frac{m}{h})] [1 - (\sigma^D)^2]}$, 依据瑞利近似算法, a_3 的

选取应满足 $\frac{d(\omega^2)}{da_3} = 0$, 得

$$[\alpha K_1 + \frac{\rho_c}{\rho_m} (1 - \alpha) K_2] \frac{\partial \Lambda_{eff}^D}{\partial a_3} - \Lambda_{eff}^D [\alpha \frac{\partial K_1}{\partial a_3} + \frac{\rho_c}{\rho_m} (1 - \alpha) \frac{\partial K_2}{\partial a_3}] = 0 \quad (31)$$

确定一组 (α 、 β) 值和环形压电振子材料参数, 就可计算出 a_3 的值, 进而得出位移函数的各个系数。

5 压电振子性能参数

5.1 有效机电耦合系数

环形压电振子是两种不同材料结合在一起的, 应分析两种材料结合在一起的耦合系数, 对于弯曲压电振子, 有效机电耦合系数通常可用下式计算

$$k_{eff}^2 = \frac{U^I - U^V}{U^I} \quad (32)$$

式中 U^I 为恒定电流下的位能, U^V 为恒定电压下的位能。

5.1.1 恒压状态下的位能

当环形压电振子在恒定电压状态下工作时, 电场强度为

$$E_3 = \beta_{33}^s D_3 - \frac{g_{31} Y^D z}{(1 - \sigma^D)} \left[\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{d^2 w}{dr^2} \right] \quad (33)$$

式中 $\beta_{33}^s = \beta_{33}^T \left[1 + \frac{2g_{31}^2 Y^D}{\beta_{33}^s (1 - \sigma^D)} \right]$ 。

式 (33) 积分得工作电压

$$V = \int_{m/2}^{h/2} E_3 dz = \beta_{33}^s \frac{(h-m)}{2} D_3 - \frac{g_{31} Y^D (h^2 - m^2)}{\delta (1 - \sigma^D)} \left[\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{d^2 w}{dr^2} \right] \quad (34)$$

令电压 $V=0$, 解出电位移 D_3 , 求出单位面积具有的位能, 在进行积分得到整个压电陶瓷中总的位能

$$U_c^V = \frac{\pi}{3} \frac{Y_c^D (h^3 - m^3) \xi^2}{[1 - (\sigma^D)^2] a^2} \Lambda_c^D - \frac{\pi}{3} \frac{3k_p^2 k_a^V Y^D (1 + \sigma^D) h^2 (h-m) \xi^2}{[1 - (\sigma^D)^2] a^2} \quad (35)$$

其中

$$k_p^2 = \frac{2g_{31} Y^D}{\beta_{33}^s (1 - \sigma_m)} \quad (36)$$

$$k_a^V = \frac{1}{2} a_2^2 \beta^2 + \frac{3}{2} a_2 a_3 \beta^3 + \left(\frac{81}{64} a_3^2 + 2a_2 a_4 \right) \beta^4 + \frac{18}{5} a_3 a_4 \beta^5 + \frac{8}{3} a_4^2 \beta^6 + \frac{24}{7} a_4 a_5 \beta^7 + \frac{11}{4} a_5^2 \beta^8 \quad (37)$$

压电振子在恒压时的总位能 (包括金属基板和压电陶瓷的位能) 为

$$U^V = U_c^V + U_m = \frac{\pi h^3 Y_c^D \xi^2}{3 [1 - (\sigma^D)^2] a^2} \Lambda_{eff}^V \quad (38)$$

式中 $\Lambda_{eff}^V = \Lambda_c^D - 3k_p^2 k_a^V (1 + \sigma^D) (1 - \alpha)$ 为有效位能因子。

5.1.2 恒流状态下的位能

因环形压电振子为双晶片粘接在基板上, 总电荷为单晶片的两倍, 得

$$Q = 2 \int_0^{\beta a} D_3 2\pi r dr = \frac{2\pi g_{31} Y^D h \xi}{\beta_{33}^s (1 - \sigma^D)} [2a_2 \beta^2 + 3a_3 \beta^3 + 4a_4 \beta^4 + 5a_5 \beta^5] + \frac{4\pi (\beta a)^2 V}{\beta_{33}^s (h-m)} \quad (39)$$

令 $Q=0$, 可求出压电振子的开路电压为

$$V_{OC} = \frac{g_{31} Y^D (h^2 - m^2) \xi}{4 (1 - \sigma^D) a^2} [2a_2 + 3a_3 \beta + 4a_4 \beta^2 + 5a_5 \beta^3] \quad (40)$$

得恒流状态下压电陶瓷片的总位能

$$U_c^I = \frac{2\pi Y^D [(2h-m)^3 - m^3] \xi^2}{3 [1 - (\sigma^D)^2] a^2} \Lambda_c^D - \frac{4\pi}{3} \frac{3k_p^2 k_a^V Y^D (1 + \sigma^D) h^2 (h-m) \xi^2}{[1 - (\sigma^D)^2] a^2} \quad (41)$$

式中 $k_a^I = (\frac{9}{64} a_3^2 \beta^4 + \frac{3}{5} a_4 a_5 \beta^6 + \frac{1}{2} a_5^2 \beta^7)$ ，在恒定电流条件下，压电振子的总位能为

$$U^I = U_c^I + U_m = \frac{4\pi}{3} \frac{Y^D h^3 \xi^2}{[1 - (\sigma^D)^2] a^2} \Lambda_{eff}^I \quad (42)$$

式中 $\Lambda_{eff}^I = \Lambda_{eff}^D - \frac{3}{4} k_p^2 (1 + \sigma^D) \frac{(h^2 - m^2)^2}{h^3 (h - m)} (\frac{9}{64} a_3^2 + \frac{6}{10} a_3 a_4 + \frac{2}{3} a_4 a_5 + \frac{1}{2} a_5^2)$ 为整个环形压电振子的位能因子

将式 (38)、(42) 代入式 (34) 便得到压电振子的等效机电耦合系数为

$$k_{eff}^I = \frac{U^I - U^V}{U^I} = \frac{3k_p^2 (1 + \sigma^D) (1 - \alpha) \beta^2 (a_2 + \frac{3}{2} a_3 \beta + 2a_4 \beta^2 + \frac{5}{2} a_5 \beta^3)^2}{4h \Lambda_{eff}^D - 6k_p^2 k_a^I (1 + \sigma^D) (1 - \alpha)} \quad (43)$$

5.2 谐振频率

由式 (32) 得环形压电振子在空气中的谐振频率为

$$\omega_{ra}^V = \frac{2hC_p}{a^2} \sqrt{\frac{\Lambda_{eff}^V}{3K_p}} \quad (44)$$

故

$$f_{ra}^V = \frac{hC_p}{\pi a^2} \sqrt{\frac{\Lambda_{eff}^V}{3K_p}} \quad (45)$$

5.3 压电振子最大输出功率和变形量

当环形压电振子承受最大变形时，输出功率为 [16]

$$P_{a1} = \frac{\eta_{ma} \omega_r^V U^V}{Q_m^V} \quad (46)$$

式中， U^V 是环形压电振子在恒定电压状态下最大位能， η_{ma} 为机械与电声效率。恒压状态下机械品质因数 $Q_m^V = \frac{\sqrt{3} (K_p)^{3/2}}{H (\Lambda^V)^{1/2} \rho_w C_p} \frac{1}{C_p} (1 + \frac{M}{M_e})^3 \eta_{ma}$ ， C_w 为声速。

$$U^V = \frac{1}{2} \frac{|v^2|}{(\omega_r^V)^2 C_M^E} = \frac{1}{2} \frac{\xi^2 H}{C_M^E} \quad (47)$$

得到环形压电振子中应力为

$$T_{rr} = D^* \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial r^3} + \frac{\sigma^*}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - \frac{\sigma^*}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) z \quad (48)$$

式中

$$D^* = \frac{[1 - (\sigma^*)^2] \left[\frac{Y^D}{1 - (\sigma^D)^2} I_1 + \frac{Y_m}{1 - \sigma_m^2} I_2 \right]}{1 - (\sigma^*)^2} \quad (49)$$

$$\sigma^* = \frac{\frac{\sigma^D Y^D}{1 - (\sigma^D)^2} I_1 + \frac{Y_m}{1 - \sigma_m^2} I_2}{\frac{Y^D}{1 - (\sigma^D)^2} I_1 + \frac{Y_m}{1 - \sigma_m^2} I_2} \quad (50)$$

其中, $I_1 = \frac{1}{12} (h^3 - m^3)$, $I_2 = \frac{1}{12} m^3$ 。

式(49)得

$$T_{rr} = D^* \xi \left[\frac{3a_3}{a^3} (2 + \sigma^*) + \frac{8}{a^4} (3 + \sigma^*) r \right] z \quad (51)$$

压电陶瓷表面中心处最大应力为

$$T_{r \max} = \frac{D^* \xi_{cr} h 3a_3}{2 a^3} (2 + \sigma^*) \quad (52)$$

式(52)得到环形压电振子极限变形量为

$$\xi_{cr} = \frac{2a^3 T_{r \max}}{3a_3 D^* h (2 + \sigma^*)} \quad (53)$$

将式(53)代入(49), 得压电陶瓷在最大应力作用下最大输出功率为

$$P_{a1} = \frac{\eta_{ma} \omega_r^V H}{2 Q_m^V C_M^E} \xi_{cr}^2 = \frac{\eta_{ma} \omega_r^V H}{2 Q_m^V C_M^E} \left[\frac{2a^3 T_{r \max}}{3a_3 D^* h (2 + \sigma^*)} \right]^2 \quad (54)$$

压电振子在电压限制情况下最大输出功率为

$$P_{a2} = \frac{\eta_{ma} \omega_r^V Q_m^V \pi (\beta a)^2 (h - m) E_{\max}^2}{2 \beta_{33}^s} \frac{k_{eff}^2}{1 - k_{eff}^2} \quad (55)$$

其中, $(U_e)_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\pi (\beta a)^2 (h - m) E_{\max}^2}{\beta_{33}^s}$ 是最大的电能, E_{\max} 为陶瓷片

能施加的最大电场强度。

有两种情况限制压电振子的最大输出功率：若 $P_{a1} < P_{a2}$ ，则将压电振子的变形作为前提，此时的电压应小于压电振子的极限电压；若 $P_{a1} > P_{a2}$ ，则将电压限制作为前提，应力不能超过压电振子的极限应力。压电振子承受的最大工作电压为

$$V_{\max} = \frac{2a^3 T_{r\max}}{3\beta a_3 D^* Q_m^V h (2 + \sigma^*)} \sqrt{\frac{1 - k_{\text{eff}}^2}{k_{\text{eff}}^2} \frac{\beta_{33}^s H (h - m)}{\pi C_M^E}} \quad (P_{a1} < P_{a2}) \quad (56)$$

或

$$V_{\max} = 2E_{\max} (h - m) \quad (P_{a1} \geq P_{a2}) \quad (57)$$

要分析压电振子最大输出功率和变形量，圆环形压电振子表面应力较大，主要失效形式为机械失效，因此以机械变形为前提。电压不能超过极限电压，最大电压可由式（50）确定。

本文选取的陶瓷材料为 PZT-5，基板材料为 $60\text{Si}_2\text{Mn}$ ，则它们各个参数分别为 $Y^D = 7.8 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ， $Y_m = 19.4 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ， $\sigma^D \approx 0.30$ ， $\sigma_m \approx 0.28$ ， $\rho_m = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ， $E = 2.16 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ， $\rho_c = 7.75 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ， $g^{33} = -12.1 \times 10^{-3} \text{ Vm/N}$ ， $\varepsilon_{33}^T = 1.09 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$ ， $E_{\max} = 570 \text{ V/mm}$ ， $T_{\max} = 3.64 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ ，假设 $\alpha = 0.5$ 、 $\beta = 0.5$ 的情况下，得到各个参数分别为 $\alpha_0 = 1$ ， $\alpha_2 = 1$ ， $\alpha_3 = -2.41$ ， $\alpha_4 = -3.18$ ， $\alpha_5 = 3.59$ 。

6 对主要性能参数影响

6.1 对有效机电耦合系数的影响

不同的厚度比 α 和直径比 β 对环形压电振子有效机电耦合系数关系如图 2 所示。从图中可看出，金属基板和压电陶瓷片的厚度比和直径比过大或过小都不利于压电振子的电能和机械能相互耦合。厚度比在 $0.4 \sim 0.8$ 和直径比 $0.4 \sim 0.8$ 之间有效机电耦合系数较高，在这个范围内压电振子介电能和弹性能耦合程度较好。

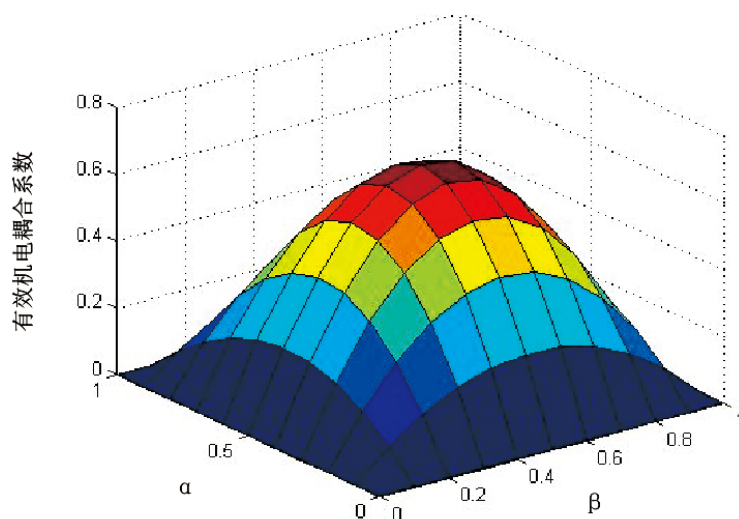


图2 α 和 β 对有效机电耦合系数影响

Figure 2 Effect of α and β on effective electromechanical coupling coefficient

6.2 对谐振频率的影响

不同的厚度比 α 和直径比 β 对环形压电振子谐振频率影响关系如图3所示。厚度比 α 在 0.6 ~ 0.9 之间，直径比 β 在 0.5 ~ 0.9 之间，谐振频率范围为 3000 ~ 4000 Hz。

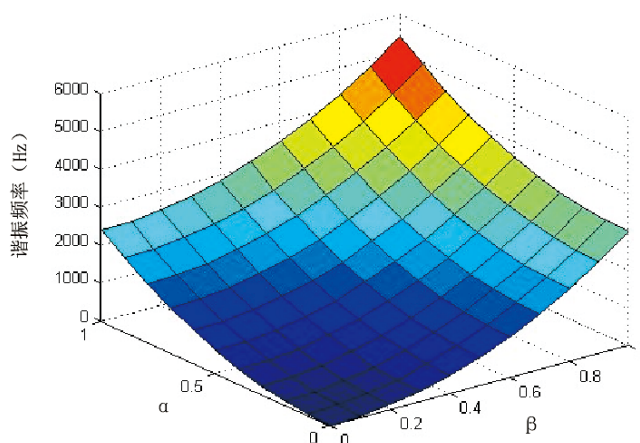


图3 α 和 β 对谐振频率影响

Figure 3 The effect of α and β on resonance frequency

6.3 对发射功率的影响

环形压电振子结构参数的选取应以提高系统的输出功率和表面应力为前提。直径比与厚度比对输出功率影响关系如图4所示。可看出, 环形压电振子的厚度比在0.6~0.9之间, 直径比应选取在0.4~0.6之间, 压电振子的输出功率较大。

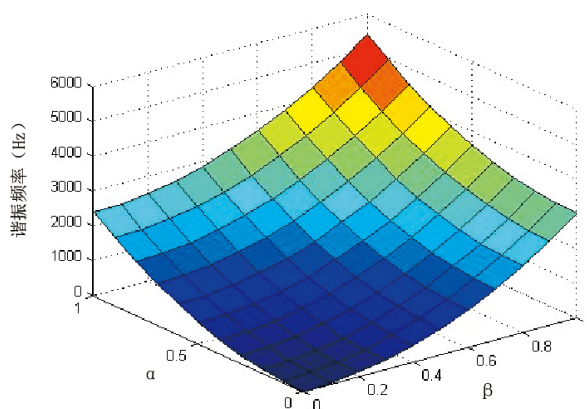


图4 α 和 β 对输出功率影响

Figure 4 Effects of α and β on output power

6.4 对变形量的影响

不同厚度比和直径比对变形量影响关系如图5所示。

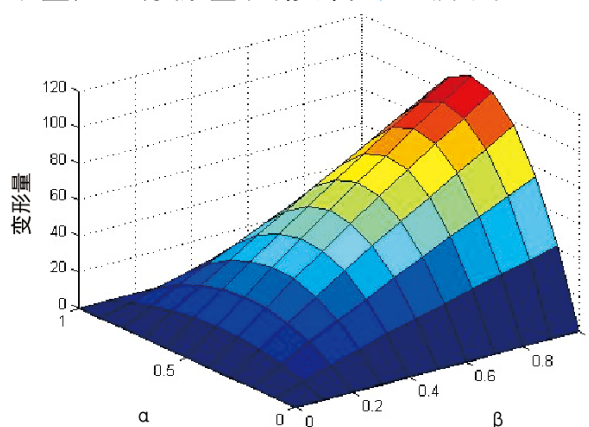


图5 α 和 β 与压电振子变形量影响

Figure 5 Effects of α and β on piezoelectric oscillator deformation

从上图可看出, 环形压电振子的直径比和厚度比过大或过小同样会制约压

电振子的变形量,厚度比 $0.4 \sim 0.7$ 和直径比 $0.7 \sim 1.0$ 变形量最大。

综合考虑环形压电振子结构参数对各个相关性能参数的影响,确定环形压电振子的结构参数范围为 $\alpha = 0.6 \sim 0.8$, $\beta = 0.5 \sim 0.8$ 。依据这种结构尺寸匹配制作的压电振子,输出功率大,输出力大、位移较大且有效机电耦合系数较高。

7 压电振子实验测试

压电振子的实物图如图6所示。其中,压电陶瓷片直径65 mm,厚度为1.2 mm,金属基板直径100 mm,厚度为6.0 mm,直径比0.65,厚度比0.71。主要测试压电振子中心点变形量与驱动电压和驱动频率变化关系,以及压电振子的阻抗特性。

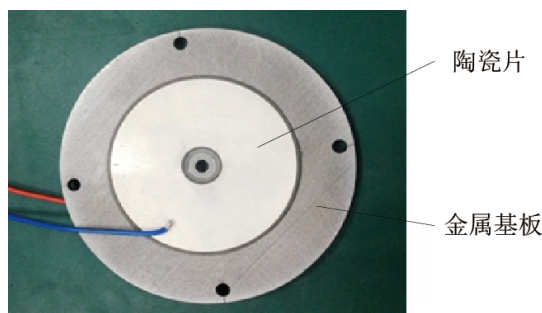


图6 环形压电振子实物图

Figure 6 Physical diagram of ring piezoelectric oscillator

压电振子测试装置如图7所示,信号驱动器驱动压电振子在交流信号的作用下往复弯曲振动,压电振子振动位移通过激光测微仪进行测量,位移显示器跟踪压电振子的振动位移及时输出。



图7 性能测试装置图

Figure 7 Performance test device diagram

将驱动电压调至一固定值, 设定为 200 V, 改变驱动信号发生器的频率, 测定其中心点的位移, 测试结果如图 8 所示。

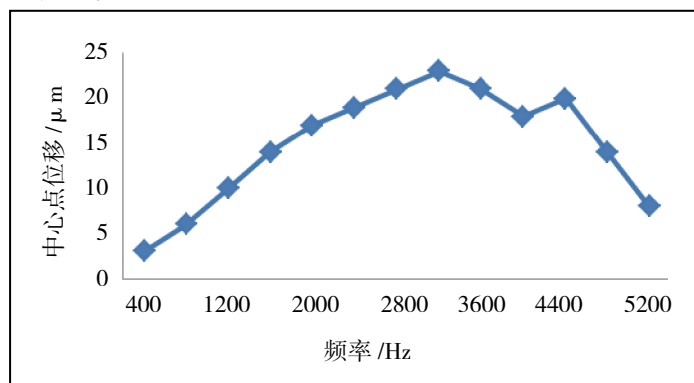


图 8 压电振子位移与驱动频率关系图

Figure 8 The relationship between displacement and driving frequency of piezoelectric oscillator

从图中可看出, 环形压电振子中心点最大位移在一阶谐振点 3300 Hz 处, 为 23 μm 。

用 HP4294A 型阻抗分析仪对压电振子阻抗特性进行测试, 测试装置及测试结果如图 9 所示。

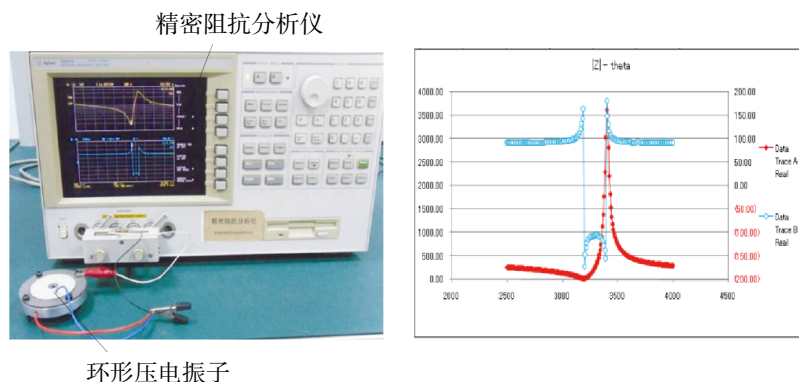


图 9 压电振子阻抗测试装置及测试结果图

Figure 9 Piezoelectric vibrator impedance test device and test result diagram

从上图可知, 压电振子的谐振频率为 3200 Hz。蓝色断点区域为环形压电振子的谐振频率区间, 红线最低处为谐振频率点, 阻抗值最小, 最高处为反谐振频率点, 阻抗值最大。

8 结论

利用瑞利能量法推导出了压电振子的主要性能参数的解析式。确定了最佳尺寸匹配参数为直径比在 0.5 ~ 0.8 之间、厚度比 0.6 ~ 0.8 之间,依据这种结构尺寸匹配制作的压电振子,输出功率大,输出力大且有效机电耦合系数较高。选取直径比 0.65,厚度比 0.71 的压电振子进行实验测试,共振点处中心点唯一最大为 23 μm ,性能较好,该结构尺寸匹配正处于理论分析范围内。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(51705031, 51707081),吉林省科技发展计划资助项目(20190103050JH)。

参考文献

- [1] 吴博达, 鄂世举, 杨志刚, 等. 压电驱动与控制技术的发展与应用[J]. 机械工程学报, 2003, 39(10): 79-85.
- [2] 裴先茹, 高海荣. 压电材料的研究和应用现状[J]. 安徽化工, 2010, 36(3): 4-10.
- [3] SMITS J G, DALKE S I, COONEY T K. The constituent equations of piezoelectric bimorphs [J]. Sensors and Actuators: Physical, 1991, 28(1): 41-61. [https://doi.org/10.1016/0924-4247\(91\)80007-C](https://doi.org/10.1016/0924-4247(91)80007-C)
- [4] Dobruki, Ramirez G. Free Vibration of Laminated Circular Piezoelectric Plates and Discs [J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 229(4): 935-956. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2520>
- [5] Christopher J M, Fred K F. Optimization of a Circular Piezoelectric Bimorph for a Micropump Driver [J]. J. Micromech. Microeng, 2000, 3: 459-465. <https://doi.org/10.1088/0960-1317/10/3/323>
- [6] 李丹, 卢贵武, 王东. 三叠片换能器的仿真与测试[J]. 内蒙古师范大学学报: 自然科学汉文版, 2013, 42(42): 417-423.

- [7] 阚君武, 吴一辉, 宣明, 等. 泵用三叠片环形压电振子的弯曲振动分析[J]. 机械工程学报, 2005, 41(1): 54-59.
- [8] 孙晓锋, 杨志刚, 邵泽波, 等. 泵用圆形压电双晶片弯曲变形分析[J]. 排灌机械工程学报, 2013, 31(1): 31-35.
- [9] 彭太江, 阚君武, 杨志刚, 等. 圆形压电振子弯曲变形数值模拟与实验[J]. 中国机械工程学报, 2009, 20(16): 1987-1991.
- [10] 李东明, 孙宝元, 董维杰, 等. 压电双晶片执行器驱动位移模型研究[J]. 中国机械工程, 2003, 14(17): 1499-1502.
- [11] 吕航, 刘治国, 范明庆. 基于 APDL 的矩形复合压电振子的优化设计[J]. 微特电机, 2013, 41(8): 33-35.
- [12] 吕航, 范明庆, 王育平. 矩形复合超声波电动机振子的尺寸调整及优化设计[J]. 微特电机, 2011, 40(4): 35-37.
- [13] 王玉山, 龚立娇, 王锐. 铜-压电陶瓷复合型悬臂压电振子发电性能分析[J]. 压电与声光, 2013, 35(3): 395-397.
- [14] 龚立娇, 王玉山. 悬臂压电叠层复合梁的弯曲振动固有频率[J]. 机械设计与制造, 2012, 3(3): 221-223.
- [15] 曲绍鹏, 李东明. 压电双晶片谐响应有限元模拟分析[J]. 大连交通大学学报, 2012, 33(4): 26-29.
- [16] Zhang T, Wang Q M. Valveless piezoelectric micropump for fuel delivery in direct methanol fuel cell (DMFC) devices. Journal of Power Sources, 2005, 140(1): 72-80. <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2004.07.026>