

财经类高校数学分析课程中不定积分的求解技巧的教学探讨

张付臣

重庆工商大学数学与统计学院，经济社会应用统计重庆市重点实验室，重庆

摘要 | 本文深入探讨和总结了在财经类高校中经济数学分析这门课程中不定积分求解方法的授课技巧，不定积分的求解方法主要包括公式法、换元积分法（第一换元积分法和第二换元积分法）、分部积分法、有理函数的积分法等，在实际不定积分题目的求解中这些求解方法往往不是孤立的，而是综合运用的。对于财经类高校中的大学生来说，只有熟练掌握这些方法才能够掌握好不定积分的求解技巧。掌握这些学习方法有助于提高大学生学习的兴趣与学习的积极性，同时增强了老师教学和学生学习的效率，从而提高学生分析问题和解决实际问题的能力。

关键词 | 不定积分；教学方法；解题技巧

Copyright © 2021 by author (s) and SciScan Publishing Limited

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1 引言

不定积分是数学分析中的重要内容，它可以看做一元函数微分的逆运算，同时是一元函数定积分学习的基础，在常微分方程求解等方面有着重要的应

基金项目：重庆工商大学教育教学改革项目（编号：2018106）。

通讯作者：张付臣，重庆工商大学数学与统计学院，博士，副教授。E-mail: zhangfuchen1983@163.com。

文章引用：张付臣. 财经类高校数学分析课程中不定积分的求解技巧的教学探讨 [J]. 理论数学前沿, 2021, 3 (1): 1-6.

<https://doi.org/10.35534/tms.0301001>

用^[1-5]。不定积分是财经类高校大学生微积分学习的重要组成部分，对于财经类高校的大学生来说主要是掌握不定积分的一些常见计算方法。因此，不定积分的学习对于财经类高校的大学生来说显得非常重要。本文总结了不定积分的授课方法与技巧。

2 直接公式法

要熟练记忆一些基本的公式，对于不定积分初学者来说非常重要。下面是一些不定积分的基本公式：

$$\int 0 dx = C \quad (1)$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (2)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (3)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (4)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (5)$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C \quad (6)$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C \quad (7)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C \quad (8)$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C \quad (9)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \quad (11)$$

对于不定积分初学者来说，一定要熟练的记忆上述公式。对于上述每个不定积分公式，记忆的时候可以先记忆等号的左边再记忆等号的右边，因为对于不定积分初学者来说熟练记忆每个等式的左边就知道了哪些函数可以求不定积分，从而给定一个要求解的不定积分，初学者会感觉到上述给定的不定积分可能会运用到上述某个不定积分公式求解，这个第一感觉非常重要。

3 第一换元积分法

由于能用直接公式法求解的不定积分十分有限，因此有必要进一步研究不

定积分的其他求解方法。由一元函数微分形式不变性可知,把上述公式中(1)~(10)中变量的 x 换成变量 x 的某个函数 $f(x)$ 也成立,即有

$$\int 0df(x) = C \quad (12)$$

$$\int f(x)^\alpha df(x) = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{f(x)} df(x) = \ln|f(x)| + C \quad (13)$$

其他公式(3)~(11)依次类推也有上述的类似结论,上述公式也称为推广的不定积分公式法或者第一换元积分法。这些公式的证明非常简单,只要令 $f(x)=t$ 即可证明。对于微积分初学者来说,如果直接公式法不能够求解就要考虑能否用推广的不定积分公式法求解。

4 第二换元积分法

定理1^[1]. 设 $x=\varphi(t)$ 是单调可导的函数且有 $\varphi'(t) \neq 0$. 又设 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数 $F(t)$, 则 $F[\varphi^{-1}(x)]$ 是 $f(x)$ 的原函数, 即有如下换元公式:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = F(t) + C = F[\varphi^{-1}(x)] + C \quad (14)$$

这种换元方法, 成为第二换元积分法。第二换元积分法这要包括三角函数代换法、最简无理函数代换法、倒代换法等等。

当被积函数含有二次根式的时候, 为了消去根号, 通常可以采用三角函数代换法。采用三角函数代换法一般有下列3种情况: (1) 当被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时候, 一般令 $x=a \sin t$ ($|t| < \frac{\pi}{2}$) 就可以去掉二次根式。(2) 当被积函数含有 $\sqrt{a^2+x^2}$ 的时候, 一般只要令 $x=a \tan t$ ($|t| < \frac{\pi}{2}$) 就可以去掉二次根式。(3) 当被积函数含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时候, 一般令 $x=a \sec t$ ($0 < |t| < \frac{\pi}{2}$) 就可以去掉二次根式。

当根式内表达式中有 x 的一次函数时候, 一般令根式整体为变量 t , 再从中解出 x , 将 x 表示为 t 的有理函数, 从而一般可以将无理函数的不定积分化为有理函数的不定积分。

倒代换法主要当被积函数的分式中分母的次数比分子的次数大很多的时候, 可以通过变量代换 $x=\frac{1}{t}$ 从而将以 x 为积分变量的不定积分转为以 t 为积分变量的不定积分, 并且简化了不定积分的计算。

5 分部积分法

前面介绍了不定积分求解的直接公式法、换元积分法,但是有些不定积分只靠前面的不定积分方法是很难求解的,当前面的这些方法不适用时,一般要考虑不定积分的分部积分法。

分部积分法的基本公式如下

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x) \quad (15)$$

在不定积分的求解中如果被积函数是两个初等函数的乘积,一般可以按照“(最前面)反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数、三角函数(最后面)”的顺序,前面的函数取为 $u(x)$,后面的函数拿到微分的后面凑成 $dv(x)$ 。

例题1: 求 $\int xe^x dx$.

解: 被积函数可以看成幂函数 x 与指数函数 e^x 的乘积,按照“反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数、三角函数”的顺序,指数函数 e^x 排序在幂函数 x 的后面,所以可以把 $e^x dx$ 凑成微分 de^x ,即 $e^x dx = de^x$ 。从而有 $\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$ 。

6 有理函数的积分法

在不定积分的求解中,经常会遇到被积函数是有理函数的情形。有理函数的基本形式为

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \quad (16)$$

其中 m, n 是正整数, $a_n \neq 0, b_m \neq 0$. 求有理函数(不妨设 $m < n$)不定积分的基本步骤是: 第一步首先利用多项式的除法把有理假分式 $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 化成多项式与真分式的和。然后, 把真分式分解为部分分式之和。从而, 有理函数(不妨设 $m < n$)的不定积分问题得到求解。如果 $m > n$, 则求有理函数的不定积分只需要把真分式分解为部分分式之和, 则有理函数的不定积分问题得到求解。

例题2: 求 $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 1} dx$.

解：由于被积函数 $\frac{x^3+x+1}{x^2-1}$ 是假分式，所以首先应该把被积函数 $\frac{x^3+x+1}{x^2-1}$ 利用多项式的除法化成多项式与真分式的和。经过计算可得 $\frac{x^3+x+1}{x^2-1}=x+\frac{2x+1}{x^2-1}$ ，然后把真分式 $\frac{2x+1}{x^2-1}$ 化为部分分式之和，经过计算可得 $\frac{2x+1}{x^2-1}=\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{\frac{3}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}$ 。这样就把被积函数 $\frac{x^3+x+1}{x^2-1}$ 化为多项式与部分分式之和，即有 $\frac{x^3+x+1}{x^2-1}=x+\frac{2x+1}{x^2-1}=x+\frac{\frac{3}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}$ 。

$$\begin{aligned}\text{从而有 } \int \frac{x^3+x+1}{x^2-1} dx &= \int x + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} dx = \int x dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-1} d(x-1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} d(x+1) \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

7 结论

本文讨论了财经类高校中经济数学分析这门课程中不定积分解题的授课技巧，对于提高大学生学习的兴趣与积极性有一定的积极作用。对于财经类高校中的大学生来说，只有熟练掌握这些方法才能够掌握好不定积分的求解技巧。

参考文献

- [1] 李霄民, 李庆玉. 微积分(上册)[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2019: 157-183.
- [2] 张付臣, 秦进, 陈明. 凸显财经特色的财经类高校常微分方程课程改革问题及对策探讨[J]. 遵义师范学院学报, 2020, 22(4): 121-124.
- [3] 张少华. 十年考研数学之常微分方程试题分析[J]. 遵义师范学院报, 2012, 14(5): 104-106.
- [4] 张伟年. 本科数学专业常微分方程教学改革与实践[J]. 高等理科教育, 2003(1): 19-21.
- [5] 秦进, 朱彬, 代姍妮, 等. 高等几何课程教学的认识与实践[J]. 遵义师范学院学报, 2017(4): 108-110.

Discussion on the Teaching Method of Solving Indefinite Integral in Finance and Economics Colleges

Zhang Fuchen

Chongqing Key Laboratory of Social Economy and Applied Statistics, College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing

Abstract: This paper deeply summarizes and discusses the solution the method of indefinite integral in the course of economic mathematical analysis in finance and economics colleges. The solution methods of indefinite integral mainly include formula method, substitution integral method (first substitution integral method and second substitution integral method), integration by parts, integration of rational functions, etc. In the actual solution of indefinite integral, these methods are often not isolated, but integrated. For college students in finance and economics, only by mastering these methods can they master the solving skills of indefinite integral. Mastering these learning methods is helpful to improve the interest and enthusiasm of college students in learning, and at the same time, enhance the efficiency of teachers' teaching and students' learning, so as to improve the ability of students to analyze and solve practical problems.

Key words: Indefinite integral; Teaching methods; Problem-solving skills