

## 平面直角坐标正形变换简易解算方法

刘大海<sup>1,2</sup> 陈永红<sup>2</sup> 张 萧<sup>2</sup> 曾鄂春<sup>1,2</sup>  
李春云<sup>2</sup> 曾庆桂<sup>2</sup>

1. 深圳市地质局, 深圳;

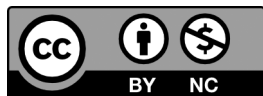
2. 深圳地质建设工程公司, 深圳

**摘 要** | 在全面启用 CGCS2000 坐标系后, 常常需要将北京 54 坐标及地方独立坐标等平面直角坐标批量转换为 CGCS2000 坐标。坐标变换分间接法及直接法。间接法是以大地坐标 ( $B, L$ ) 作为间接参数, 根据椭球投影原理进行转换, 理论严密, 转换精准。直接法是直接根据区域公共点坐标, 以最小二乘法为基础建立坐标变换方程组或数值逼近模型, 转换近似。正形变换是直接法之一, 它具有等角变换的优点, 可通用于同球及异球的高斯投影平面直角坐标变换。本文对正形变换的参数求解采用了简易的非线性拟合全局最优化方法以及多元线性回归分析方法, 两者解算结果完全相同。多元线性回归分析, 方法简单, 计算快捷, 转换精度足以满足工程需要。

**关键词** | 北京 54 坐标; CGCS2000 坐标; 回归分析; 非线性拟合; 1stOpt

Copyright © 2021 by author (s) and SciScan Publishing Limited

This article is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



我国自 2008 年 7 月 1 日开始启用 CGCS2000 坐标系, 过渡期 8—10 年<sup>[1]</sup>。全面启用 CGCS2000 后, 工作中常常需要将北京 54 坐标及地方独立坐标等平面

通讯作者: 刘大海, 男, 1957—, 江西大余人, 正高级工程师, 水文地质工程地质专业, 主要从事岩土工程及勘测工作。

Email: szldh2005@163.com

文章引用: 刘大海, 陈永红, 张萧平, 等. 平面直角坐标正形变换简易解算方法 [J]. 测绘观察, 2021, 3 (4): 187–199.

<https://doi.org/10.35534/go.0304019>

直角坐标批量变换为 CGCS2000 坐标<sup>[2]</sup>。

坐标变换有间接法及直接法。间接法,是以大地坐标(B, L)作为间接参数,根据椭球投影原理进行坐标转换,理论严密,转换精准,但计算繁琐,批量转换工作量大。直接法,是直接根据区域公共点坐标,用最小二乘法原理建立坐标变换的数值逼近模型,转换近似,批量转换工作量较小。

正形变换<sup>[3]</sup>是坐标变换的直接法之一,本质上属多项式变换,但它满足高斯投影的等角变换条件,可通用于同球及异球的高斯投影平面直角坐标变换。

正形变换,我国学者杨启和<sup>[3-5]</sup>、吕晓华<sup>[6]</sup>、马俊<sup>[7]</sup>等进行了比较深入的研究;张佃友<sup>[8]</sup>用 VC 语言编程对北京 54 坐标与西安 80 坐标进行了 10 参数的正形变换;覃辉<sup>[9]</sup>用可编程计算器求解最小二乘法正规方程组进行了正形变换;易衡<sup>[10]</sup>利用 Excel 的 VBA 编程,进行了相似变换及正形变换 6 参数的解算;刘博涛<sup>[11]</sup>用 MATLAB 工具研究了石家庄 CGCS2000 与独立坐标系的布尔沙 7 参数变换模型;李东<sup>[12]</sup>、郭喜春<sup>[13]</sup>、陈永立<sup>[14]</sup>研究了 CGCS2000 与独立坐标系二维 4 参数、7 参数模型的坐标转换问题;黎彬<sup>[15]</sup>探讨了基于 CGCS2000 的珠海独立坐标系与其它坐标系变换的平面 4 参数及二维多项式模型的转换。

目前,正形变换系数的求解主要还是采用传统的经典方法:直接用线性代数方法求解由最小二乘法原理形成的法方程组。求解方程组需要进行复杂的编程或采用线性代数软件。

本文以正形变换为理论,变换参数(10 参数)求解采用了简易的非线性拟合全局最优化方法及多元线性回归分析方法。前者采用国产 1stOpt 全局最优化软件求解<sup>[16]</sup>,其最大优点在于不需要提供求解参数的初始猜测值;后者采用 Excel 大众计算工具解算,方便快捷。两者具有相同的解算结果。

## 1 正形变换的基本原理

### 1.1 正形变换原理

在复平面上,设旧坐标  $x+i \cdot y$  与新坐标  $x_n+i \cdot y_n$  为:

$$\text{设: } \begin{cases} z=x+i \cdot y \\ w=x_n+i \cdot y_n \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{则坐标变换: } x_n + i \cdot y_n = f(x + i \cdot y) \quad (2-1)$$

$$\text{或} \quad : w = f(z) \quad (2-2)$$

上述变换要满足正形变换（等角变换）的充要条件是：

$$\frac{\partial x_n}{\partial x} = \frac{\partial y_n}{\partial y}, \quad \frac{\partial x_n}{\partial y} = -\frac{\partial y_n}{\partial x} \quad (3)$$

对函数  $f(z)$  在  $z_0$  展开为 Taylor 级数，则有：

$$\begin{cases} w = f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} \cdot \Delta z + \frac{f''(z_0)}{2!} \cdot \Delta z^2 + \dots + \frac{f^m(z_0)}{m!} \cdot \Delta z^m + \varepsilon \\ f(z_0) = p_0 + i \cdot q_0 = x_{n0} + i \cdot y_{n0} \\ \frac{f^m(z_0)}{m!} = p_m + i \cdot q_m \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} w &= x_n + i \cdot y_n \\ &= x_{n0} + i \cdot y_{n0} \\ w &= x_n + i \cdot y_n \\ &= x_{n0} + i \cdot y_{n0} \\ &\quad + (p_1 + i \cdot q_1) \cdot (\Delta x + i \cdot \Delta y) + (p_2 + i \cdot q_2) \cdot (\Delta x + i \cdot \Delta y)^2 \\ &\quad + \dots + (p_m + i \cdot q_m) \cdot (\Delta x + i \cdot \Delta y)^m \end{aligned} \quad (5)$$

由于坐标数值较大，为避免高次幂的运算误差，对于自变量展开点， $m > 1$  的高次幂正形变换，可取为公共点的平均坐标值或中心点坐标值； $m = 1$  的 1 次幂正形变换，可取为原点：

正形变换（ $m > 1$ ，高次幂）： $x_0 = x_{mean}$ ， $y_0 = y_{mean}$ ， $\Delta x = x - x_0$ ， $\Delta y = y - y_0$

正形变换（ $m = 1$ ，1 次幂）： $x_0 = 0$ ， $y_0 = 0$ ， $\Delta x = x$ ， $\Delta y = y$

由于：

$$(p_1 + i \cdot q_1) \cdot (\Delta x + i \cdot \Delta y) = \Delta x \cdot p_1 - \Delta y \cdot q_1 + i \cdot (\Delta x \cdot q_1 + \Delta y \cdot p_1) \quad (6-1)$$

$$\begin{aligned} &(p_2 + i \cdot q_2) \cdot (\Delta x + i \cdot \Delta y)^2 \\ &= (\Delta x^2 - \Delta y^2) \cdot p_2 - 2\Delta x \Delta y \cdot q_2 + i \cdot [(\Delta x^2 - \Delta y^2) \cdot q_2 + 2\Delta x \Delta y \cdot p_2] \end{aligned} \quad (6-2)$$

$$\begin{aligned} &(p_3 + i \cdot q_3) \cdot (\Delta x + i \cdot \Delta y)^3 \\ &= (\Delta x^3 - 3\Delta x \Delta y^2) \cdot p_3 - (3\Delta x^2 \Delta y - \Delta y^3) \cdot q_3 \\ &\quad + i \cdot [(\Delta x^3 - 3\Delta x \Delta y^2) \cdot q_3 + (3\Delta x^2 \Delta y - \Delta y^3) \cdot p_3] \end{aligned} \quad (6-3)$$

$$\begin{aligned}
 & (p_4 + i \cdot q_4) \cdot (\Delta x + i \cdot \Delta y)^4 \\
 &= (\Delta x^4 + \Delta y^4 - 6\Delta x^2 \Delta y^2) \cdot p_4 - (4\Delta x^3 \Delta y - 4\Delta x \Delta y^3) \cdot q_4 \\
 & \quad + i \cdot [(\Delta x^4 + \Delta y^4 - 6\Delta x^2 \Delta y^2) \cdot q_4 + (4\Delta x^3 \Delta y - 4\Delta x \Delta y^3) \cdot p_4]
 \end{aligned} \quad (6-4)$$

为表达简洁, 令:

$$\begin{cases} a_1 = \Delta x \\ a_2 = \Delta x^2 - \Delta y^2 \\ a_3 = \Delta x^3 - 3\Delta x \Delta y^2 = \Delta x (\Delta x^2 - 3\Delta y^2) \\ a_4 = \Delta x^4 + \Delta y^4 - 6\Delta x^2 \Delta y^2 = (\Delta x^2 - \Delta y^2)^2 - 4\Delta x^2 \Delta y^2 \end{cases} \quad (7-1)$$

$$\begin{cases} b_1 = \Delta y \\ b_2 = 2\Delta x \Delta y \\ b_3 = 3\Delta x^2 \Delta y - \Delta y^3 = \Delta y (3\Delta x^2 - \Delta y^2) \\ b_4 = 4\Delta x^3 \Delta y - 4\Delta x \Delta y^3 = 4\Delta x \Delta y (\Delta x^2 - \Delta y^2) \end{cases} \quad (7-2)$$

则正形变换的复数表达式为:

$$\begin{cases} w = x_n + i \cdot y_n \\ = x_{n0} + i \cdot y_{n0} \\ \quad + a_1 \cdot p_1 - b_1 \cdot q_1 + i \cdot (a_1 \cdot q_1 + b_1 \cdot p_1) \\ \quad + a_2 \cdot p_2 - b_2 \cdot q_2 + i \cdot (a_2 \cdot q_2 + b_2 \cdot p_2) \\ \quad + a_3 \cdot p_3 - b_3 \cdot q_3 + i \cdot (a_3 \cdot q_3 + b_3 \cdot p_3) \\ \quad + a_4 \cdot p_4 - b_4 \cdot q_4 + i \cdot (a_4 \cdot q_4 + b_4 \cdot p_4) \end{cases} \quad (8-1)$$

$$\begin{aligned}
 w &= x_n + i \cdot y_n \\
 &= [x_{n0} + (a_1 \cdot p_1 - b_1 \cdot q_1) + (a_2 \cdot p_2 - b_2 \cdot q_2) + (a_3 \cdot p_3 - b_3 \cdot q_3) \\
 & \quad + (a_4 \cdot p_4 - b_4 \cdot q_4)] \\
 & \quad + i \cdot [y_{n0} + (a_1 \cdot p_1 + b_1 \cdot q_1) + (a_2 \cdot p_2 + b_2 \cdot q_2) + (a_3 \cdot p_3 + b_3 \cdot q_3) \\
 & \quad + (a_4 \cdot p_4 + b_4 \cdot q_4)]
 \end{aligned} \quad (8-2)$$

复数域的正形变换(8-2), 在实数域有如下表达:

1) 正形变换方程式

$$\begin{cases} x_n = x_{n0} + a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3 + a_4 \cdot p_4 - b_1 \cdot q_1 - b_2 \cdot q_2 - b_3 \cdot q_3 - b_4 \cdot q_4 \\ y_n = y_{n0} + a_1 \cdot q_1 + a_2 \cdot q_2 + a_3 \cdot q_3 + a_4 \cdot q_4 + b_1 \cdot p_1 + b_2 \cdot p_2 + b_3 \cdot p_3 + b_4 \cdot p_4 \end{cases} \quad (9)$$

2) 正形变换矩阵式

令:

$$Z_{nj} = \begin{bmatrix} x_{nj} \\ y_{nj} \end{bmatrix} \quad j=1, 2, \dots, n \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 X_j &= [A_{0j} \quad B_{0j} \quad A_{1j} \quad A_{2j} \quad A_{3j} \quad A_{4j} \quad B_{1j} \quad B_{2j} \quad B_{3j} \quad B_{4j}] \quad j=1, 2, \dots, n \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{1j} & a_{2j} & a_{3j} & a_{4j} & -b_{1j} & -b_{2j} & -b_{3j} & -b_{4j} \\ 0 & 1 & b_{1j} & b_{2j} & b_{3j} & b_{4j} & a_{1j} & a_{2j} & a_{3j} & a_{4j} \end{bmatrix} \quad j=1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \quad (11)$$

则有:

$$Z_n = [x_{n1} \ x_{n2} \ \cdots \ x_{nn} \ y_{n1} \ y_{n2} \ \cdots \ y_{nn}]^T \quad (12)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & -b_{11} & -b_{21} & -b_{31} & -b_{41} \\ 1 & 0 & a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & -b_{12} & -b_{22} & -b_{32} & -b_{42} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & a_{4n} & -b_{1n} & -b_{2n} & -b_{3n} & -b_{4n} \\ \hline 0 & 1 & b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ 0 & 1 & b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} & a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & b_{4n} & a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & a_{4n} \end{bmatrix} \quad (13)$$

简写为:

$$X = [A_0 \ B_0 \ A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4] \quad (14)$$

$$\text{变换参数: } \beta = [x_{n0} \ y_{n0} \ p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T \quad (15)$$

则正形变换可简写为:

$$Z_n = X \cdot \beta \quad (16)$$

$$\beta = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot Z_n \quad (17)$$

当具有  $t$  组坐标公共点时, 利用最小二乘法就可建立满足等角变换的正形变换式 (9) 及 (16)。

正形变换式 (9)、(16), 即是关于变量  $x, y$  的非线性方程, 也是关于多元线性变量  $X$  的线性方程。由此, 正形变换参数  $\beta$  的求解方法有 3 种:

1) 线性代数求解法, 这是经典方法, 即用线性代数方法求解方程组 (16) 或直接用式 (17) 计算; 2) 非线性拟合最优化方法, 即用最优化方法求解非线性方程组 (9); 3) 多元线性回归法, 即用回归分析法求解多元线性方程组 (9)、(16)。

## 1.2 正形变换参数与相似变换参数的互换关系

1) 坐标系旋转角  $\alpha$  (测量坐标系左手规则)

$$\begin{aligned} \alpha &= \theta - \theta_n \\ &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \arctan\left(\frac{y_n - y_{n0}}{x_n - x_{n0}}\right) \end{aligned}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \arctan\left[\frac{(a_1 \cdot q_1 + b_1 \cdot p_1) + (a_2 \cdot q_2 + b_2 \cdot p_2) + \dots + (a_4 \cdot q_4 + b_4 \cdot p_4)}{(a_1 \cdot p_1 - b_1 \cdot q_1) + (a_2 \cdot p_2 - b_2 \cdot q_2) + \dots + (a_4 \cdot p_4 - b_4 \cdot q_4)}\right]$$

由于坐标系旋转角与坐标点的位置无关，为简单计算，取：\$x=1, y=0\$，

$$\text{则: } \begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_3=1 \\ a_4=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1=0 \\ b_2=0 \\ b_3=0 \\ b_4=0 \end{cases}$$

从而有：

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{q_1+q_2+q_3+q_4}{p_1+p_2+p_3+p_4}\right) \quad (18)$$

2) 缩放因子 \$k\$

$$k = p_1 / \cos \alpha = -q_1 / \sin \alpha \quad (19)$$

当正形变换取幂次 \$m=1\$ 时，正形变换退化为等价的相似变换：

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n0} \\ y_{n0} \end{bmatrix} + k \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (20)$$

## 2 正形变换解算方法

由于正形变换即是 \$x, y\$ 的非线性方程，也是 \$X\$ 的线性方程。因此，本文变换系数的求解采用简易的最优化非线性拟合分析及多元线性回归分析。

### 2.1 非线性拟合分析

国产全局最优化软件 1stOpt 求解非线性方程，其最大优点是不需要提供求解参数的初始猜测值，程序简短明了，求解效率高，求解参数为全局最优化。程序前半部分定义参数共享模式及非线性拟合方程；后半部分定义 Data 语句，放置公共点坐标。直接运行程序就可求解变换参数。

坐标变换非线性拟合最优化求解程序（1stOpt）：

Title "1.D—CGCS2000 正形变换 -4 次幂”；

```
// 定义变换参数:
Parameters xn0, yn0;
Parameters p1, p2, p3, p4;
Parameters q1, q2, q3, q4;
Variable dx, dy, xn, yn; // 定义自变量 (dx, dy) 及因变量 (xn, yn)
sharedModel; // 参数共享模式
// 变换在 (x0, y0) 点展开为 Taylor 级数
// 正形变换非线性拟合方程:
Function xn=xn0
    +dx*p1-dy*q1
    + (dx^2-dy^2)*p2-2*dx*dy*q2
    +dx*(dx^2-3*dy^2)*p3-dy*(3*dx^2-dy^2)*q3
    + ((dx^2-dy^2)^2-4*dx^2*dy^2)*p4-4*dx*dy*(dx^2-dy^2)*q4;
yn=yn0
    +dx*q1+dy*p1
    + (dx^2-dy^2)*q2+2*dx*dy*p2
    +dx*(dx^2-3*dy^2)*q3+dy*(3*dx^2-dy^2)*p3
    + ((dx^2-dy^2)^2-4*dx^2*dy^2)*q4+4*dx*dy*(dx^2-dy^2)*p4;
Data; // 公共点坐标:
    // dx          dy          xn          yn
    // Δ xD        Δ yD        x2000      y2000
87431.373    -13585.753    1458070.417    276480.225
82061.762     13031.889    1452759.850    303110.017
54607.908     29173.748    1425341.242    319312.923
-16764.988     51233.188    1354014.883    341529.440
-45916.569      5207.095    1324864.238    342436.689
-102896.364    -2441.692    1267765.900    288039.544
-84670.242    -67735.536    1285851.843    222706.954
26147.121     -61752.939    1396680.212    228448.699
```

## 2.2 多元线性回归分析

当有  $t$  组公共点坐标时, 根据最小二乘法原理建立的回归方程组 (16) 有  $2t$  个多元线性方程。求解正形变换参数  $\beta$ , 理论上的经典方法是求解方程组 (16) 或直接用式 (17) 计算。经典方法计算工作量大, 一般需编程或用专业线性代数软件求解。实际上, 可以大众计算工具 Excel 进行解算。

Excel 多元线性回归分析功能, 使用方便, 计算快捷。准备好正形变换式 (9) 或 (16) 的数据后, 就可进行多元线性回归分析。回归分析时, 勾选常数为 0 后, 就可直接得到多元线性方程的回归系数  $\beta$ 。

## 3 计算虚例

虚拟某地 8 组公共点坐标。独立坐标与 CGCS2000 坐标数据见表 1, 多元线性自变量数据见表 2, 公共点正形变换坐标数据、因变量数据见表 3。Excel 多元线性回归分析及 1stOpt 非线性拟合分析的解算参数及坐标误差详见表 4。解算结果表明, 多元线性回归分析与非线性拟合分析解算的结果相同。坐标最大误差, 正形变换 (4 次幂) 的误差小, 仅 0.00084m, 以满足实际工程需要。相似变换误差较大, 达 1.85565m, 其原因在于变换区域过大。

表 1 公共点原始坐标数据 单位: m

Table 1 Original coordinate data of common point unit:m

点号	x xD	y yD	xn x2000	yn y2000
1	375612.630	59798.530	1458070.417	276480.225
2	370243.019	86416.172	1452759.850	303110.017
3	342789.165	102558.031	1425341.242	319312.923
4	271416.269	124617.471	1354014.883	341529.440
5	242264.688	125461.378	1324864.238	342436.689
6	185284.893	70942.591	1267765.900	288039.544
7	203511.015	5648.747	1285851.843	222706.954
8	314328.378	11631.344	1396680.212	228448.699

表 2 多元线性回归变量矩阵数据（正形变换 2--- 幂次 4）

Table 2 Matrix Data of multiple linear regression variables (orthomorphic transformation 2 --- power 4)

应变量	zn	A0	B0	A1	A2	A3	A4	B1	B2	B3	B4
xn	4458070.417	1	0	87431.37	7459672278.23	61993450267668.00	50003035241198900000.00	13585.75	2375642072.66	309050912905371.00	35443026248579000000.00
xn	4452759.850	1	0	82061.76	6564302631.12	510805119866880.00	38515434438822700000.00	-13031.89	-2138839543.80	-261062204583232.00	-28079980089080600000.00
xn	4425341.242	1	0	54607.91	2130916030.12	23410458454869.80	-5611288348803170000.00	-29173.75	-3186234686.30	-236160417489663.00	-13579197137523900000.00
xn	4354014.883	1	0	-16764.99	-2343774725.81	127304163306105.00	2542279668059340000.00	-51233.19	1717847576.85	91279356930692.00	-8052495466845060000.00
xn	4324864.238	1	0	-45916.57	-603692503.43	276773147297438.00	-22506934435449800000.00	-52077.10	4782403064.79	-188152989056383.00	-5774201757174930000.00
xn	4267765.900	1	0	-102896.36	10581699890.32	-1087591537577630.00	111719883948010000000.00	2441.69	-502482458.23	7754086956666.90	-10634237146201400000.00
xn	4285851.843	1	0	-84670.24	2580947064.30	558422143395493.00	-124908065024011000000.00	67735.54	-11470368467.17	1146020708166440.00	-59208827643553600000.00
xn	4396680.212	1	0	26147.12	-3129753545.09	-281254237944780.00	-633170565807880000.00	61752.94	3229323120.84	-10883397776971.00	-20213970971347200000.00
yn	526480.225	0	1	-13585.75	-2375642072.66	-309050912905371.00	-3544302624857900000.00	87431.37	7459672278.23	61993450267668.00	50003035241198900000.00
yn	553110.017	0	1	13031.89	2138839543.80	261062204583232.00	28079980089080600000.00	82061.76	6564302631.12	510805119866880.00	38515434438822700000.00
yn	569312.923	0	1	29173.75	3186234686.30	236160417489663.00	13579197137523900000.00	54607.91	2130916030.12	23410458454869.80	-5611288348803170000.00
yn	591529.440	0	1	51233.19	-1717847576.85	-91279356930692.00	8052495466845060000.00	-16764.99	-2343774725.81	127304163306105.00	2542279668059340000.00
yn	592436.689	0	1	52077.10	-4782403064.79	188152989056383.00	5774201757174930000.00	-45916.57	-603692503.43	276773147297438.00	-2250693443544980000.00
yn	538039.544	0	1	-2441.69	502482458.23	-7754086956666.90	10634237146201400000.00	-102896.36	10581699890.32	-1087591537577630.00	11171988394801000000.00
yn	472706.954	0	1	-67735.54	11470368467.17	-1146020708166440.00	59208827643553600000.00	-84670.24	2580947064.30	558422143395493.00	-124908065024011000000.00
yn	478448.699	0	1	-61752.94	-3229323120.84	10883397776971.00	20213970971347200000.00	26147.12	-3129753545.09	-281254237944780.00	-633170565807880000.00

表 3 公共点正形变换坐标数据 单位: m

Table 3 Common point conformal transformation coordinate data unit: m

点号	$\Delta x$ =x-x0	$\Delta y$ =y-y0	xn x2000	yn y2000
1	87431.373	-13585.753	1458070.417	276480.225
2	82061.762	13031.889	1452759.850	303110.017
3	54607.908	29173.748	1425341.242	319312.923
4	-16764.988	51233.188	1354014.883	341529.440
5	-45916.569	52077.095	1324864.238	342436.689
6	-102896.364	-2441.692	1267765.900	288039.544
7	-84670.242	-67735.536	1285851.843	222706.954
8	26147.121	-61752.939	1396680.212	228448.699

表 4 独立坐标—CGCS2000 坐标变换结果

Table 4 Independent coordinate - CGCS2000 coordinate transformation results

项目		1. 正形 -4 次幂		2. 正形 -1 次幂		3. 相似变换
		excel 线性回归	1stOpt 非线性拟合	excel 线性回归	1stOpt 非线性拟合	1stOpt 非线性拟合
展开点	x0	288181.2571	288181.2571	0	0	0
	y0	73384.2830	73384.2830	0	0	0
坐标变换解算参数	xn0	1370668.4419	1370668.4417	1082325.2895	1082325.2895	1082325.2895
	yn0	290258.6676	290258.6676	217502.0118	217502.0118	217502.0118
	p1	1.000009046	1.000009046	1.000006678	1.000006678	<b>1.000006678</b>
	p2	-1.713079E-12	-1.713085E-12			
	p3	-4.228172E-19	-4.228934E-19			
	p4	-4.181995E-24	-4.182121E-24			
	q1	-0.002184803	-0.002184803	-0.002181694	-0.002181694	<b>-0.002181694</b>
	q2	-2.085544E-10	-2.085544E-10			
	q3	8.578573E-18	8.578516E-18			
	q4	-4.060442E-24	-4.061302E-24			
	$\alpha$	<b>0.002184780</b>	<b>0.002184780</b>	<b>0.002181676</b>	<b>0.002181676</b>	0.002181676
	k	<b>1.000011432</b>	<b>1.000011432</b>	<b>1.000009058</b>	<b>1.000009058</b>	1.000009058
坐标	min ( xn,yn )	0.00001	0.00001	0.05658	0.05658	0.05658
变换	max ( xn,yn )	0.00084	0.00084	1.85565	1.85565	1.85565
误差	mean( xn,yn )	0.00029	0.00029	0.83344	0.83344	0.83344

注：正体值：解算参数；斜体值：导出参数（由解算参数导出）。

## 4 结语

自全面启用 CGCS2000 后，工作中常常需要将北京 54 坐标及地方独立坐标

批量转换为 CGCS2000 坐标, 批量转换工作量大。本文以正形变换理论为基础, 讨论了正形变换参数的简易解算方法: 非线性方程拟合分析的全局最优化求解及多元线性回归分析解算。

1) 实际解算表明, 非线性拟合最优化分析与多元线性回归分析具有相同的解算结果, 解算精度足以满足实际需要。前者, 需专业最优化软件, 后者只需 Excel 大众计算工具。Excel 以其工具大众、方法简单、计算快捷等优点, 十分有利于平面直角坐标正形变换系数的求解以及坐标的批量转换。

2) 正形变换(4次幂), 可通用于同球及异球的高斯投影平面直角坐标变换, 其适用区域大, 转换精度高。相似变换, 适用区域较小, 当变换区域较大时转换精度较低。

3) 为避免大数据坐标的高次幂运算误差, 保证坐标变换的解算精度, 高幂次的正形变换的展开点坐标宜取为公共点坐标的平均值或中心点坐标。

4) 实际计算表明, 当区内公共点较多且精度较高时, 仅用边界公共点建模与采用全部公共点建模, 其坐标变换精度几乎同等。

## 参考文献

- [1] 陈鹏飞, 成英燕, 文涵江, 等. 2000 国家大地坐标系实用宝典 [M]. 北京: 测绘出版社, 2008: 3-4.
- [2] 陈鹏飞, 成英燕, 秘金钟, 等. 2000 国家大地坐标系建立的理论与方法 [M]. 北京: 测绘出版社, 2014: 31-33.
- [3] 杨启和. 地图投影变换原理与方法 [M]. 北京: 解放军出版社, 1990, 29-31, 169-171.
- [4] 杨启和. 等角投影数值变换的研究 [J]. 测绘学报, 1982, 11(4): 268-282.
- [5] 杨启和. 等角投影变换的正形变换多项式及其应用的研究 [J]. 地图, 1990(4): 13-16.
- [6] 吕晓华. 地图投影数值变换方法综合评述 [J]. 测绘学院学报, 2002, 19(2): 150-153.

- [ 7 ] 马俊, 蔚伯虎. 等角投影数值变换的正形多项式方法及其应用分析 [ J ]. 北京测绘, 2002 ( 4 ) : 32-34.
- [ 8 ] 张佃友, 覃辉. 正形变换实现北京 54 坐标与西安 80 坐标之间的转换 [ J ]. 城市勘测, 2007 ( 6 ) : 86-87.
- [ 9 ] 覃辉. 控制网平差与测绘工程 [ M ]. 上海: 同济大学出版社, 2021: 55-64.
- [ 10 ] 易衡, 郑茂仪. 利用 Excel 实现坐标转换功能 [ J ]. 科技视界, 2015 ( 23 ) : 203-204.
- [ 11 ] 刘博涛, 袁凌云, 李杰. 基于 CGCS2000 的独立坐标系建立与应用 [ J ]. 城市勘察, 2016 ( 3 ) : 118-120.
- [ 12 ] 李东, 毛之琳, 等. CGCS2000 与独立坐标系转换模型适用性研究 [ J ]. 测绘工程, 2015, 24 ( 1 ) : 1-5.
- [ 13 ] 郭喜春, 李东. 基于 CGCS2000 建立城市相对独立坐标系统的方法 [ J ]. 测绘通报, 2012 ( 10 ) : 5-15.
- [ 14 ] 陈永立, 李新法, 马会林. 与 CGCS2000 相联系的独立坐标系建立方法研究 [ J ]. 测绘通报, 2013 ( 9 ) : 43-50.
- [ 15 ] 黎彬, 黄校, 李秀龙. 基于 CGCS2000 建立珠海市城市相对独立坐标系的探讨 [ J ]. 城市勘测, 2014 ( 1 ) : 117-120.
- [ 16 ] 程先云, 张伟等. 优化拟合建模—1stOpt 应用详解 [ M ]. 北京: 中国建材工业出版社, 2012.

# A Simple Solution Method for Orthomorphic Transformation of Plane Rectangular Coordinates

Liu Dahai<sup>1,2</sup>   Chen Yonghong<sup>2</sup>   Zhang Xiao<sup>2</sup>   Zeng Echun<sup>1,2</sup>  
Li Chunyun<sup>2</sup>   Zeng Qinggui<sup>2</sup>

1. Shenzhen Geological Bureau, Shenzhen, 518023;

2. Shenzhen Geological Construction Engineering Company, Shenzhen, 518023

**Abstract:** After the full use of CGCS2000 coordinate system, it is often necessary to batch convert plane rectangular coordinates such as Beijing 54 coordinates and local independent coordinates into CGCS2000 coordinates. Coordinate transformation is divided into indirect method and direct method. The indirect method takes geodetic coordinates ( $B$ ,  $l$ ) as indirect parameters and converts them according to the ellipsoidal projection principle. The theory is rigorous and the conversion is accurate. The direct method is to establish the coordinate transformation equations or numerical approximation model based on the least square method according to the regional common point coordinates. Orthomorphic transformation is one of the direct methods. It has the advantages of equiangular transformation and can be used in rectangular coordinate transformation of Gaussian projection plane of the same sphere and different spheres. In this paper, a simple nonlinear fitting global optimization method and multiple linear regression analysis method are used to solve the parameters of orthomorphic transformation, and the results are the same. The method of multiple linear regression analysis is simple, the calculation is fast, and the conversion accuracy is enough to meet the needs of engineering.

**Key words:** Beijing 54 coordinates; independent coordinates; CGCS2000 coordinates; nonlinear fitting; optimization; regression analysis; Excel; 1stOpt