

难题破解，群星闪烁

——SJTU-125 全球“科学”问第一题再思考

钱 进

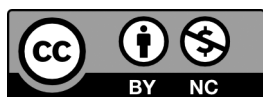
中南财经政法大学，武汉

摘 要 | 本文用曾发现的“素数分两半”筛选出的“数核”结构，简化了传统的数论问题。留心“奇偶归一”运算中，各类正整数、特别是 E 数对应“行数”的变化，成功找出“归一”的路径。用不同星形、色彩标注数类，揭示数学之美，再一次证实“万数之源、检验万数”，“同而不和”，细微差异使得素数如此特别。

关键词 | 数核；奇偶归一运算 $\Gamma_{\alpha\beta}$ ；“奇偶归一”问题； Δ_s 数； E_s 数；星座模式；天象图

Copyright © 2022 by author (s) and SciScan Publishing Limited

This article is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



1 引子

奇偶归一问题，名声很大，百度上有各种介绍。“现在已经无法确切考证 $3n+1$ 猜想到底是谁先提出来的。但是有文献显示早在上个世纪 30 年代，德国数学家 Lothar Collatz 就考虑过类似问题。”所以，较普遍认为，这个问题是由克拉兹（Collatz）在 1937 年提出的。克拉兹猜想也被叫做角谷猜想、冰雹猜想、

作者简介：钱进，武汉市人，中南财经政法大学，计算机经济信息管理专业，退休教师，E-mail: qjcd@qq.com。 科学研究人员国际唯一学术标识码：ORCID 0000-0001-8201-2360。

文章引用：钱进：难题破解，群星闪烁——SJTU-125 全球“科学”问第一题再思考 [J]. 理论数学前沿, 2022, 4 (1) : 1-17.

<https://doi.org/10.35534/tms.0401001>

Thwaites 或者乌拉姆 (Ulam) 猜想、hailstone 问题、 $3n+1$ 问题、Hasse 算法问题、Kakutani 算法问题。

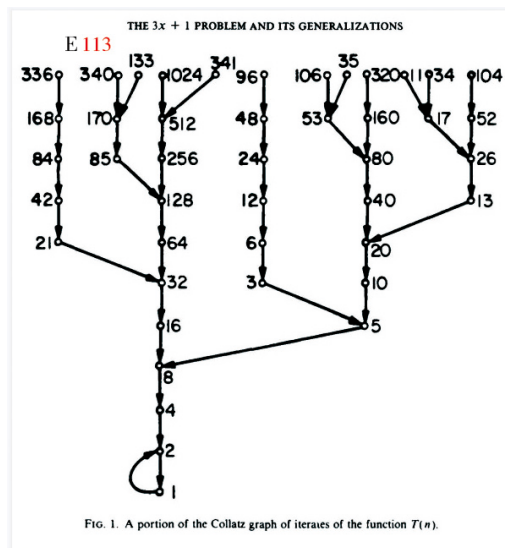
问题的算法描述如下：

- (1) 输入一个正整数 n ;
- (2) 如果 $n=1$ 则结束;
- (3) 如果 n 是奇数, 则 n 变为 $3n+1$, 否则 n 变为 $n/2$;
- (4) 转入第 (2) 步。

近来, 网传引文 [1] 证明了“奇偶归一”问题, 若果真被国际数学家们认可, 笔者将欣喜地对四位作者表示诚挚的祝贺。刚读完它的证明, 虽然过于繁琐, 笔者异常欣慰地感觉到, 作者们设计 $(Z^+)_{\infty \times 6}$ 发现了正整数依据 6 的周期变化, 会较快认同引文 [2] 发现的“数核”之说。其实, 笔者把引文 [3] 里 20 年前的发现, 既然由 [2] 在国内做了交待, 可以没有顾忌地去《科学》回答它和上海交大携手共同提出的 125 个问题的第一题, 为何又回来国内写第二篇呢? 因为笔者读了第一篇正式论述 $3n+1$ 的论文 [4], 就发现 P5 插图有错。又因为“奇偶归一”问题被网络渲染得太难了: “克拉兹问题的特殊之处在于: 尽管很容易将这个问题讲清楚, 但直到今天仍不能保证这个问题的算法对所有可能的输入都有效——即至今没有人证明对所有的正整数该过程都终止” [5]。 $3n+1$ 猜想到底有多难呢? 甚至大数学家厄特希 (P.Erdos) 曾说过: “数学还没有成熟到足以解决这样的问题!” [5] 据说数学天才陶哲轩也认为这个猜想不太可能被当前的技术证明。难, 因而重要, 笔者想让年轻人的成果赶快获得国际公认 (从而获得悬赏), 不要留下上世纪 60 年代、陆家羲痛失“女生散步”著作权的遗憾。估计年轻人会很快用上本人“数核”提供的工具, 把他们现在的证明砍去三分之二的篇幅, 让人易读易懂。事实上, 笔者已经用较小篇幅, 完成了证明。笔者差点否认引文 [1] 证明的有效性。只是在发出本文前一稿之际, 再次阅读了自己证明的打印件, 突然意识到, [1] 文“主要结果第二部分定理 4-5”是否发现了第一部分 6 列无限行矩阵 $(Z^+)_{\infty \times 6}$ 中, 正整数在行数方向的依 4 周期变化? 尽管本人发现, 在行向, 不同类别数据周期有 2、有 4, 也有 8 的变化规律。一查, [1] P18 页果然 “Take the row number (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

10, 11, 12, ...) of C4 in $(Z+)_{\infty \times 6}$ ”宣称 $(Z+)_{\infty \times 4}$ 表示 $(Z+)_{\infty \times 6}$ 内数据的行号，而不是 $(Z+)_{\infty \times 6}$ 内数据分 4 列的重排。引文 [4] 是本人读到的第一篇有关“奇偶归一”问题的证明，又发现是许多相关论文引用最多的一篇，读后发现其 P5 插图（图 1）左上有一个关键数据 133 错误，颇能说明问题。

[2] 用希腊字母做序号，以 $A \alpha$ 、 $B \beta$ 、 $\Gamma \gamma$ 、 $\Delta \delta$ 、 $E \varepsilon$ 、 $Z \zeta$ 分别表示经过模六求余运算，余数为 1 至 6 的正整数。其子集合 I_j 的下标 $J=1$ ，即 I_1 ，表示 A 类；...；下标 $J=5$ ，即 I_5 ，表示是 E 类；下标 $J=0$ ，即 I_0 ，是 Z 类。其中，唯有 A 类和 E 类数中存在素数，特设计两列“线性表”存放之，中间另设一列，表示左右两数是否“孪生素数”。当友人帮助找到引文 [4] 时，笔者一看奇偶归一的操作，就试算了前 30 个数，发现奇数的运算结果都得到 $\Delta \delta$ 类数， $(2k-1) \times 3+1=6k-2$ 。所以在本文，特把中间一列，换为 $\Delta \delta$ 类数——其他类别，因为 $\Gamma \gamma$ 数变化简单，偶数一直“折半”下降，所以，只需在脑子里想象在线性表中对应列、某一行就行了。接着，从网上下载了比较（图 1）表现更好的 the Collatz graph [5]——出处尚未查明，笔者用不同颜色、图案来标记 6 类数字，得到一幅彩色天象图（图 2），再一次领会到丘成桐教授赞赏不绝的“数学美”！



2 几何颂^{[6] P40}

苍穹广而善美兮，何天理之悠悠。先哲思而念远兮，奚术算之久留。形与美之交接兮，心与物之融流……时空荡而物生兮，新数学其始流。惟对称之内蕴兮，类不变而九悠……

联想到去年初夏，笔者写作《自然数集内嵌套双子集：宿集，数核》成文，得到中学同窗传来上海交大 125 周年校庆发布信息，决心先抽取文稿内部分成果，回答 Global “Science” asks No 1 “in question SJTU-125”。5 月 14 日王元院士逝世，掐指已快到周年。王先生曾于 1988–1992 年担任中国数学会理事长，1995 年夏在青岛全国第一届均匀设计学术研讨会上，和方开泰先生一起，给我“面授机宜”，找华科大林少宫资深会员出来，帮助成立“中国数学会均匀设计分会”湖北省分支机构。闲聊时，他赞同笔者关于“数论属于离散数学、应该纳入计算机科学基础理论教学”的认识。睹物思人，特以此幅彩色天象图作周年悼念，期望能在天上一同闪耀。

图上每个数据，就像一颗颗星星，星星的关联反映了数之间的运算关系。星星的相对位置，划分成星座，便于区分和辨识。有些数据数值不同，运算结果的数类却一致，可以归纳出四种星座模式。把这幅彩色天象图和(图 1)一比较，发现把奇数的操作“乘 3 加 1”和“除 2”分开，能更好地表现数类规律的变化，操作次数的一致，从而“路径长度”唯一，有利于展示证明过程的明白无误。所以，数学美的展示程度，和对数学规律的深刻理解与表现方法直接相关。

3 四种星座模式

因为此问题简单里透着奇妙，引起文化、科技界人士的广泛注意并热情传播，称谓纷杂，本人选择将克拉兹问题称为**奇偶归一问题**比较科学。最通俗常用的叫法是 $3X+1$ 猜想，特别 19 步逆向变换内得到的数据、绘制的各数归一路径的图示，常称为**克拉茨图**（the Collatz graph，图 2 去掉彩色、图形表示的原图）。

【定义 1】奇偶归一操作：设 **even** 是偶数集合，**odd** 是奇数集合，对任一正整数 n ,

$$m = \begin{cases} n/2, & \text{if } n \in \text{even}; \\ 3 \cdot n + 1, & n \in \text{odd}. \end{cases}$$
 称一次**奇偶归一操作**，或简称“一次操作”，操作

结果 m 可继续执行**奇偶归一操作**，叫“递推”。本文把 $m=n/2$ 或 $3 \cdot n+1$ 的分支操作记为 $\Gamma_{+\alpha/\beta}$ （表示 $X3+1$ 或 $/2$ ），偶数分支记为 $\Gamma_{/\beta}$ ；奇数分支记为 $\Gamma_{+\alpha}$ 。不引起误会的前提下，也分别简记为 $\Gamma_{\alpha\beta}$ 或 Γ 、 Γ_{β} 、 Γ_{α} 。

【定义2】回归路径：任一正整数 n ，反复执行奇偶归一操作，直到 1，所得中间数字 m 串起形成的链条叫**回归路径**。1 之前的数字个数称为**路径长度**或 Path Length, PL。可用指数表示操作次数 $1=\Gamma_{\alpha\beta}^{pl}n$ 。

[2] p69, 提到《自然数集内嵌套双子集：宿集，数核》文内[**定理7**]论述 2 的幂次 2^{2k} 是素数的必要条件，有 $m=2^{2k}+1$ 这种形式，带因子 k 的 10 的幂次 $k \cdot 10^n$ 有 $m=k \cdot 10^n+1$ ($k \bmod 3 \equiv 1$) 这种形式；因为是 E 数，有可能鉴别出素数。那么，去掉“+1”， $m=2^{2k} [k \cdot 10^n (k \bmod 3 \equiv 1)]$ 是 Δ_{δ} 数。可写成 $m=6 \cdot l_4+4$ 。特别， $m=2^{2k} \cdot 10^n$ 是 Δ_{δ} 数。笔者一接手本问题，做了几个数的操作，立即发现奇数一步操作，就转换到 Δ_{δ} 数，旋即联想到 Δ_{δ} 数将是本问题求解的中心，于是，有了数类的标注。

【定义3】奇偶归一天象图：以元数 1 为中心，把路径依照路径长做半径，把 $PL=r$ 内的正整数按照奇偶归一操作次序形成的中间数字填进圆饼内，得到一个好像天穹似的图形，叫做 **2r 奇偶归一天象图**（见图 2）。 r 可以任选，本文约定 $r=18$ ，故而可以省去 r 。

【定义4】主路径：一个 2 的幂反复除以 2 形成的链条叫**主回归路径**，简称**主路径**。是**最速下降路径**。

【定义5】速降路径：一个 Z 数乘以 2 的幂，也可在一段区间内、反复除以 2 形成沿半径的链条。

【定义6】星座模式：天象图中由一段路径形成的星座，有许多数值不同、同样数目的数字，形成星座和它的形状相同，便抽取其形状特征，概括为**模式**。模式有三种：

I. ε 模式，由 Δ 数 - E 数 - Δ 数 2 次操作、3 数组成；例如： $\Delta 142$ ， 71 ， $\Delta 214$ 。

Ⅱ. β 模式, 由 Δ 数 - B 数 - Δ 数 2 次操作、3 数组成; 例如: $\Delta 160$, 80, $\Delta 40$ 。

Ⅲ. α 模式, 由 Δ 数 - B 数 - A 数 - Δ 数 3 次操作、4 数组成; 例如: $\Delta 124$, 62, 31, $\Delta 94$ 。

Ⅳ. γ 模式, 由多个 Z 数 - Γ 数 - Δ 数多次操作、3 个以上数组成; 例如: 336, 168, 84, 42, 21。

从“例如”可见, 惟有“ ε 模式”2 次操作后, 数值上升。

为了表达简洁, 本文把对模式内整数的连串操作合并记为对模式的操作, 分别记为 $\Gamma_{M\varepsilon}$ 、 $\Gamma_{M\beta}$ 、 $\Gamma_{M\alpha}$ 、 $\Gamma_{M\gamma}$, 操作算子后面跟随某类模式的该类数、或者用起始数和终止数; 上标注明模式内数的个数。例如: $\Gamma_{M\varepsilon}^3 71$, $\Gamma_{M\beta}^3 80$, 或 $\Gamma_{M\beta}^8 512-4$; $\Gamma_{M\alpha}^4 31$, $\Gamma_{M\gamma}^5 21$ 或 $\Gamma_{M\gamma}^{13} 6144-10$ 。除开 ε 模式的三种“星座模式”: α 模式和 β 模式, 都是由 Δ 数起, 到另一个 Δ 数终, 数值下降; 而 γ 模式, 下降更快捷, 保证了在从小到大已经验证过归一的 E 数之前的 5 类数最终归一。不难证明:

【定理 1】在从小到大已经验证过归一的 E 数之前的 α 模式、 β 模式和 γ 模式这三种“星座模式”内的 5 类数, 最终归一。

下面的说明, 尚需了解如下概念:

【定义 7】层数: 一个正整数到图正中“1”的路径长度。比如, 16, 所在图内“层数”为 4。层数相同 (比如 r 层) 的数, 位于半径为 r 的同一圆周上。层数为 1 ~ 4 的圆周上, 只有 2、4、8、16 四个 2 的幂, 每周只一数。

一个正整数表示成 $n=6 \cdot l+r$ 算式时, n 除 6 的整数部分 l 为 n 在线性表内的行数。必要时, l 加上下标, 以区分不同同余类别的行数, 比如用余数 r 对应的希腊字母序号做下标: 若 $n \in I_1$ (A 类), $n=6 \cdot l_1+1$; \cdots ; 若 $n \in I_5$ (E 类), $n=6 \cdot l_5+5$; 若 $n \in I_0$ (Z 类), $n=6 \cdot l_0$ 。则 l_1 、 \cdots 、 l_5 、 l_0 称为 A (\cdots E、Z) 类 n 的行数。因为 Γ_β 操作是“折半”, 在奇数行“折半”不可能产生“半行”, 需要“剥除”一个 6 和余数相加, 实质上就是转换“数核”中数的“类别”, 实际操作发现转换类别随在偶数行之前或之后而有区别, 特把它们作一一定义, 便于行文。

【定义8】前后奇数行：偶数行 $4k+2$ 之前的单数行 $4k+1$ 叫前奇数行，把之后的单数行 $4k+3$ 叫后奇数行。

为了透彻说明 E 数陡然增高又能归一的道理，可用(图1)中的 E 数来举例，恰好此图左上第一排第三个数 133 是一个第 22 行的 A 数，根据其左边数 340，它应该是 113，正是一个后奇数行 19 行的 E 数。下面有真正的 A 数：

$\Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta}^2 \varepsilon_{19} = A$ 数，形成 α 模式，由 $\Gamma_M^4 \alpha 85$ ，3 次操作 4 数组成，缓慢减小 $1/3$ 到原值约 $2/3$ 。此前一个 ε 模式 $\Gamma_M^3 \varepsilon 113$ 2 次操作 3 数组成，增大 $1/2$ 到原值约 $3/2$ （本文应是 $256=2^8$ ）。一个 Γ 数乘以 2 的幂 $2^k \cdot \gamma$ 得到 Z 数，在一段区间内、反复除以 2 形成沿半径的链条，见图 2， $\Gamma_M^{12} \gamma 3$ 从上到下、和 $\Gamma_M^{12} \gamma 21$ 从下向上的速降路径，把星象图分成两个半扇。

注意，由于 113 位于星象图的左半扇，它不可能经由 5 回归 1，只能找到主路径上的入口！ $128=2^7$ ，是一个主入口，“归一路径”进入主通道…7 步归一（因为 [4] 定义操作将“乘 3 加 1”和“折半”组合在一步，图 1 上显示 7 步——全图第一行 12 个数，路径长都是 10 步）。该定义造成诸多麻烦，故本文不用。

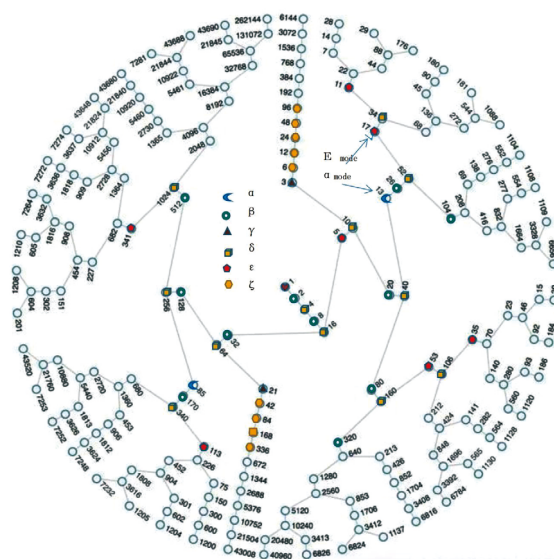
4 用星座图上层数证明各类数归一

“奇偶归一天象图”，被笔者增加两圈外圆数据如(图3)所示，扩展成 20 层。对图内每一正整数 n ，进行的每次奇偶归一操作，都有显示，“递推”操作最后结果，路径趋向元数 1。即图中每个数，对定理成立。这就建立了“数学归纳法”的基础。现在，假设 $r \leq k$ 时，定理成立，则当 $r=k+1$ 时，我们证明定理也成立……这很简单，把各类数用奇偶归一操作做一次，就有 $r > k$ ，即进入半径为 $k+1$ 的圆内了，根据假设，当 $r=k+1$ 时，定理也成立。于是对所有正整数成立？！

这里，“当 $r=k+1$ 时”的设定，隐形暗示了要求证的数，是 $k+1$ 圆周上的数。因为 $p_l=k+1$ ，就是可以通过 p_l 长路径“归一”的数！一步操作各类数早就进入 $r < k$ 的圆周之内，但是，存在逻辑错误，是“同义反复”式的证明。比如，27 这个 Γ 数，尽管 2^{111} 这个至少有 27 位十进制数字的巨大数都在 $r=111$ 的大圆盘上，却找不到区区 27 一个小数！——也许它根本不会在“归一”的路径上？注意 47 这个小 E 数，“归一”路上攀高达到 $\Delta 9232$ 。所以，一定要防止两个没有验证

过的 E 数，把它们通过“奇偶归一操作”形成的一段路径上的各类数，裹挟着带到无限远……

还是需要用数值大小，即各类数所在行数，由前向后一步一步推导，可避免逻辑漏洞。



注：从 1 到 30 已经用彩色、图符标注，中间 6 个不同标注符号依次从上向下表示 α β γ δ ϵ ζ 6 类数。

图 2 奇偶归一天象图（彩色标注数据和“图 1”，即引文 [2] 插图内数据对照）

Figure 2 The Collatz graph, $r=18$

[2] p61 [定义 1] 素数宿集：如果 $i_1 \in I_1$ 甲类， $i_5 \in I_5$ 戊类，则 $i_1 \equiv 1$ ， $i_5 \equiv 5 \pmod{6}$ ， $\hat{S} = I_1 \cup I_5$ 即，甲类和戊类自然数组成素数宿集 \hat{S} 。[定理 1] 大于 4 的所有素数即数核，包含在素数宿集 \hat{S} 中。

性质 4 如果把 I_5 和 I_1 (I_1 从 7 开始) 中的宿集数，依从小到大并行排成两列，则序号 k 或 l 与列表中的数 m 或 n ，有如下对应关系：

$$\text{i} \quad m=6 \cdot k-1, \text{ 显然 } m \in I_5; \quad k=(m+1)/6 \quad (2)$$

$$\text{ii} \quad n=6 \cdot l+1, \text{ 显然 } n \in I_1; \quad l=(n-1)/6 \quad (3)$$

$$\ominus k, l=1, 2, \dots \therefore m, n=5, 7, 11, 13, \dots$$

这里是六类数行数的计算依据。排列是 $\varepsilon, \delta, \alpha, \beta, \gamma, \zeta$, 计算公式为 $6 \cdot k - 1, 6 \cdot k - 2, 6 \cdot k + 1, 6 \cdot k - 4, 6 \cdot k - 3, 6 \cdot k$ 。

本文定理 1 确认之后，只剩下 **ε 模式**，兹用它们来克服可能“无限增长”的关键难点，完成“奇偶归一问题”证明。E 数 $\varepsilon_{15}=6 \cdot l_{\varepsilon}-1$, $\Gamma_{\alpha \beta} \varepsilon_{15}=\Delta$ 数，根据 l_{ε} 的特点，即所在行的奇偶性质，有三种继续“操作”的结果。

E 数在“数核”线性表的偶数行，一般可设为 $l_{\varepsilon}=2^i \cdot \text{odd}$ ，可转换到奇数行： $3^i \cdot \text{odd}$, $\varepsilon_{1'}=6 \cdot 3^i \cdot \text{odd}-1$ 。

笔者计算 30 内数据，到 27 颇费周折。算错落入 $\varepsilon_{267}=1601-\text{pl}=60$ 的回归路径，从 $\varepsilon_{32}=191$ 到 $\varepsilon_5=29$ 这一段，给出了一个非常说明问题的案例。比如 $\varepsilon_{32}=191$, $\rightarrow \varepsilon_{243}=1457$, $l_{\varepsilon}=2^5=32$, $l_{\varepsilon'}=3^5=243$ 。

从 ε_{32} 到 ε_{243} 实际计算过程如后。 $\Gamma_{M \alpha}^4 1201$, $\Gamma_{M \alpha}^4 901$, $\Gamma_{M \beta}^3 1352$, $\Gamma_{M \alpha}^4 169$, 到 $\Gamma_{M \alpha}^4 127$, 做 $\Gamma_{\alpha} 127$ 操作得 Δ 数 $-\text{pl}=45$ 。由此开始，遇到连续 6 个 **ε 模式**：“ $\Delta 382$, $\varepsilon_{32}=191$, $\Delta 574$, $\varepsilon_{48}=287$, $\Delta 862$, $\varepsilon_{72}=431$, $\Delta 1294$, $\varepsilon_{108}=647$, $\Delta 1942$, $\varepsilon_{162}=971$, $\Delta 2914$, $\varepsilon_{243}=1457$, $\Delta 4372$ 。”达到 E 1601 回归路径上的最大值。此后，遇到一连串 **α 模式**、 **β 模式**，很快转换到 $\varepsilon_{13}=77$, $\text{pl}=22$ 。而 77 位于前奇数行。通过一个 $\Gamma_{M \beta}^3 116$ ，进入天象图第 18 层到 E 29。回头再审视 ε_{32} , ε_{48} , ε_{72} , ε_{108} , ε_{162} , ε_{243} 的行号：分别是 2^5 , $2^4 \times 3$, $2^3 \times 3^2$, $2^2 \times 3^3$, 2×3^4 , 3^5 。又如 $\varepsilon_{20}=119$, $\rightarrow \varepsilon_{45}=269$ 。

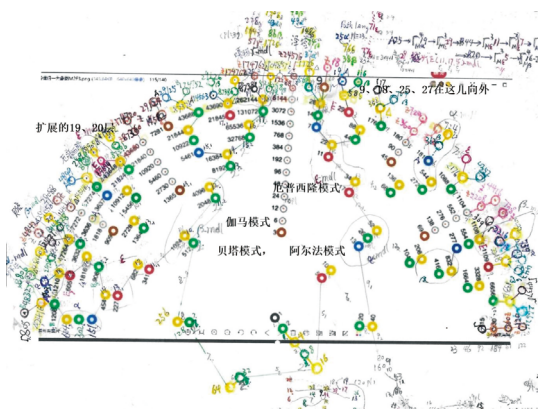


图 3 上半扇扩展后天象图（彩色标注数据和星座模式，手工计算与文内叙述对照）

Figure 3 Top half fan extended rear sky view

“奇偶归一天象图”，被笔者增加两圈外圆如图 3 所示，扩展成 20 层。对图内每一正整数 n ，进行的每次**奇偶归一操作**，都有显示，“**递推**”操作最后结果，路径趋向元数 1。即图中每个数，对定理成立。这就建立了“数学归纳法”的基础。现在，假设 $r \leq k$ 时，定理成立，则当 $r=k+1$ 时，我们证明定理也成立……这很简单，把各类数用**奇偶归一操作**做一次，就有 $r > k$ ，即进入半径为 $k+1$ 的圆内了，根据假设，当 $r=k+1$ 时，定理也成立。于是对所有正整数成立？！

（【说明】上段，提及：“奇偶归一天象图”，被笔者增加两圈外圆如图 3 所示，扩展成 20 层。图 3 可以考虑插于此处。）

这里，“当 $r=k+1$ 时”的设定，隐形暗示了要求证的数，是 $k+1$ 圆周上的数。因为 $p_l=k+1$ ，就是可以通过 p_l 长路径“归一”的！一步操作各类数早已经进入 $r < k$ 时的圆周之内，但是，存在逻辑错误，是“**同义反复**”式的证明。……

ε 从 5×2^2 行跳到 5×3^2 行。可见，在偶数行 E 数上升，2 的幂次越大，上升越快。以后直接套公式 $\varepsilon_{1^*} = 6 \cdot 3^i \cdot \text{odd} - 1$ 。不必一步一步计算了。

2. E 数在“数核”线性表的后奇数行，一般可设为 $l_e = 4 \cdot i + 3$ ，经过 $\Gamma_2 \beta \Gamma_\alpha$ 三次操作，转换到前跨 $i+1$ 行的 A 数： $\varepsilon_{15} = 6 \cdot (4 \cdot i + 3) - 1$ ， Γ 操作一次后： $\varepsilon_{15} = 6 \cdot (4i \cdot 3 + 9) - 2 = 6 \cdot (4i \cdot 3 + 8) + 4$ ， $\varepsilon_{1^*} = \Gamma_\beta^2 \Gamma_\alpha \varepsilon_{15} = 6 \cdot (3 \cdot i + 2) + 1$ 。

3. E 数在“数核”线性表的前奇数行，一般可设为 $l_e = 4 \cdot i + 1$ ，其中一半，经过 $\Gamma_\beta \Gamma_\alpha$ 三次操作，转换到前跨 $i+1$ 行的 Δ 数： $\varepsilon_{15} = 6 \cdot (4 \cdot i + 1) - 1$ ， $\Gamma_\alpha \varepsilon_{15} = 6 \cdot (4i \cdot 3 + 3) - 2 = 6 \cdot (4 \cdot i \cdot 3) + 4^2$ ， $\varepsilon_{1^*} = \Gamma_\beta^2 \Gamma_\alpha \varepsilon_{15} = 6 \times 3 \cdot i + 4$ 。另一半，前跨 $i+1$ 行换成同列较小数，可见，在奇数行 E 数下降，前奇数行下降更快。后面再严格认证。

【定理 2】对于每个 E 数，通过“有限次操作”，可转换到它前面行、即值比它小的另一个 E 数或者 Δ 数、 A 数。

用上述操作，通过试算前 30 个正整数，已经标注在图内，可以发现，前 10 个数，9 不在图内。好在不远，图的圆饼上端，28 向外， $r=19$ 的圆周上，就可出现。中间 10 个数，18、19 不在图内。也好在不远，图的圆饼上端，9 向外， $r=20$ 的圆周上，18 就可出现。28 右旁 29 向外，经过 56， $r=20$ 的圆周上，19 就可出现。后 10 个数，25、27 不在图内。25 也好在不算远，19 向外 3 步， $r=23$ 的圆周上，

25 就可出现。27 是一个很特别伽马数 $\Gamma 27$, 向它“回归”来的数, 将是泽塔数 Z , 以竖直的方向快速下降; 但是, 它回归到 1, 艰难曲折。是的, 从 27 开始, 情况变得复杂了, 按照上面的操作法则, 变换的整数值逐渐变大, 最大值达到 9232, 不过最终还是变回 1: 笔者计算期间, 因为一次比一次增大, 中途多次怀疑有否错误。因为是上面操作法则的逆推: 减 1 除 3 或乘 2, 在头脑不清醒的时候, 出现顺逆混淆或 2 替代 3 错用, 也确实出现沿计算错误歧路赴远的情况。虽错亦荣, 积累了一些心得, 有利于发现证明的诀窍。

笔者计算 30 内数据, 对于特别的 27, 纠正错误后的结果, 和网上比较, 数字一致:

$\Gamma 27$, $\Delta 82$, 41 , $\Delta 124$, 62 , 31 , $\Delta 94$, 47 , $\Delta 142$, 71 , $\Delta 214$, 107 ,
 $\Delta 322$, 161 , $\Delta 484$, 242 , 121 , $\Delta 364$, 182 , 91 , $\Delta 274$, 137 , $\Delta 412$, 206 ,
 103 , $\Delta 310$, 155 , $\Delta 466$, 233 , $\Delta 700$, 350 , 175 , $\Delta 526$, 263 , $\Delta 790$, 395 ,
 $\Delta 1186$, 593 , $\Delta 1780$, 890 , 445 , $\Delta 1336$, 668 , 334 , 167 , $\Delta 502$, 251 ,
 $\Delta 754$, 377 , $\Delta 1132$, 566 , 283 , $\Delta 850$, 425 , $\Delta 1276$, 638 , 319 , $\Delta 958$,
 479 , $\Delta 1438$, 719 , $\Delta 2158$, 1079 , $\Delta 3238$, 1619 , $\Delta 4858$, 2429 , $\Delta 7288$,
 3644 , 1822 , 911 , $\Delta 2734$, 1367 , $\Delta 4102$, 2051 , $\Delta 6154$, 3077 , $\Delta 9232$,
 4616 , 2308 , 1154 , 577 , $\Delta 1732$, 866 , 433 , $\Delta 1300$, 650 , 325 , $\Delta 976$,
 488 , 244 , 122 , 61 , $\Delta 184$, 92 , 46 , 23 , $\Delta 70$, 35 , $\Delta 106$, 53 , $\Delta 160$, 80 ,
 40 , 20 , $\Delta 10$, 5 , $\Delta 16$, 8 , 4 , 2 , 1 。

从其归一路径上各种数值变化可知, 从 Δ 数起到 Δ 数止的星座进出值的增减, 规律是: α 模式, β 模式, 数值下降; ε 模式, 数值上升。 γ 模式, 由 Z 数多次折半操作到 Γ 数, 再到 Δ 数值会增大, 但是, 因它由 3 个以上数组成, 总体减小, 而且, Γ 数不复出现, 以后变化, 就由 α 模式、 ε 模式确定。故而, 关键是掌握 ε 模式的变化规律。取 27 归一路径中一小段, $\Gamma_{M\varepsilon}^3 1367$, $\Gamma_{M\varepsilon}^3 2051$, $\Gamma_{M\varepsilon}^3 3077$, 将 $\Delta 2734$ 升高到 $\Delta 9232$, 1367 是 228 行的 ε 数, $228=57 \cdot 4$, 偶数行; 2051 是 342 行的 ε 数, $342=85 \times 4$, 中间偶数行; 3077 是 513 行的 ε 数, $513=128 \times 4+1$, 前奇数行。前奇数行必比有一段下行空间; 请看 $\Gamma_{M\beta}^3 4616$, $\Gamma_{M\alpha}^4 577$, $\Gamma_{M\alpha}^4 433$, $\Gamma_{M\alpha}^4 325$, $\Gamma_{M\beta}^3 488$, $\Gamma_{M\alpha}^4 61$, $\Gamma_{M\beta}^3 92$

一下到达 $\Gamma_M^3 \varepsilon$ 23。生动的实例：第 513 行的 ε 数转换到同一队列前第 4 行的 ε 数！——这也是奇数行跳转到偶数行的例子，本文暂不探究。

目前，人们对于小于 1018 的数都已经验证了 $3n+1$ 猜想。但验证和证明完全是两码事。具体计算为的是认识数的特性与相互关联，找到有效的证明途径。

5 用 E_ε 数彻底完成证明

【定理 3】对于每个 E 数，连同在后续路径上遇到的比它小的另一个 E 数之前（数值大）的各类数，通过有限次“奇偶归一操作”，可转换到 1。

证明：No I . 上面提及， E 数 ε_{l_5} 在“数核”线性表的偶数行，可转换到奇数行。

根据“算术基本定理”，任何正整数可分解成素数因子之积，现把所有素因子乘积记 odd，故而任何偶数一般可设为 $l_\varepsilon = 2^i \cdot \text{odd}$ ，当 $i=1$ 时， $\varepsilon_{l_5} = 6 \times 2 \cdot \text{odd} - 1$ ， $\Gamma_\beta \Gamma_\alpha \varepsilon_{l_5} = 6 \times 3 \cdot \text{odd} - 1$ ，经过二次 Γ 操作（1 次 $\Gamma_\beta \Gamma_\alpha$ 联合操作），转换到奇数行 $3 \cdot \text{odd}$ 。假设 $i=k-1$ 时，经过 $k-1$ 次 $\Gamma_\beta \Gamma_\alpha$ 操作，从偶数行 $l_\varepsilon = 2^{k-1} \cdot \text{odd}$ ，转换到奇数行 $l_\varepsilon = 3^{k-1} \cdot \text{odd}$ 。则当 $\varepsilon_{l_5} = 6 \times 2 \cdot 3^{k-1} \cdot \text{odd} - 1$ 时， $\Gamma_\alpha \varepsilon_{l_5} = 6 \times 2 \cdot 3^k \cdot \text{odd} - 2$ ， $\Gamma_\beta (\Gamma_\alpha \varepsilon_{l_5}) = 6 \times 3^k \cdot \text{odd} - 1$ 。即 $i=k$ 时，经过 k 次 $\Gamma_\beta \Gamma_\alpha$ 操作，转换到奇数行 3^k 。于是，任何一个偶数行上的 E 数，都可转换到奇数行。

随后，专门考虑 l_ε 是奇数的情形。

上面，已经有了许多较小 E 数归一的实例。可假设 $l_5 < k$ 时，即 $\varepsilon_{l_5} = 6 \cdot l_\varepsilon - 1$ ， $\Gamma^k \varepsilon_{l_5} = 1$ ，其它各类数自然也是归一的。现在证明 $l_5 = k$ 时， $\Gamma^{k+1} \varepsilon_{l_5} = 1$ 。

No II . 先看后奇数行上 E 数。后奇数行，一般可设为 $l_\varepsilon = 4 \cdot i + 3$ ， $\Gamma_\alpha \varepsilon_{l_5} = 6 \cdot (4 \times 3 \cdot i + 9) - 2 = 6 \cdot (4 \cdot i \cdot 3 + 4 \times 2) + 4$ ， $\Gamma_\beta^2 \Gamma_\alpha \varepsilon_{l_5} = 6 \cdot (3 \cdot i + 2) + 1$ ，转换到了 $3 \cdot i + 2$ 行的 A 数，前跨了 $i+1$ 行 $l_5 = 3 \cdot i + 2 < k = 4 \cdot i + 3 = k$ 。由假设 $l_5 < k$ 可认定，此 A 数归一，后奇数亦归一。

No III . 再看 E 数在前奇数行，一般可设为 $l_\varepsilon = 4 \cdot i + 1$ 。

(1) 再设 $i = 2 \cdot j - 1$ ， $l_\varepsilon = 4 \cdot (2 \cdot j - 1) + 1 = 8 \cdot j - 3$ 。 $\Gamma_\alpha \varepsilon_{l_5} = 6 \cdot (8 \times 3 \cdot j - 9) -$

$2=6 \times 8 \cdot (3 \cdot j-1) - 8$, $\Gamma_{\beta}^3 \Gamma_{\alpha} \varepsilon_{15}=6 \cdot (3 \cdot j-1) - 1$, 转换到前跨 $5 \cdot j-2$ 行、比自己小许多的另一个 E 数。 $l_5 < k = l \varepsilon$ 由假设可知, 此 E 数归一。

(2) 三 设 $i=2 \cdot j$, $l \varepsilon=4 \cdot (2 \cdot j) + 1=8 \cdot j+1$. $\Gamma_{\alpha} \varepsilon_{15}=6 \cdot (8 \times 3 \cdot j+3) - 2=6 \times 4 \cdot (2 \times 3 \cdot j+1) - 8$, $\Gamma_{\beta}^2 \Gamma_{\alpha} \varepsilon_{15}=6 \cdot (2 \times 3 \cdot j+1) - 2$, 转换到前跨 $2 \cdot j$ 行的 Δ 数 $l_5 < k = l \varepsilon$ 由假设可认定, 此 Δ 数归一, 前奇数亦归一。

综合上述 No I . II . III .3 种情况, $l_5=k$ 的 E 数归一, 也就是说每个 E 数可以被验证。定理 3 证毕。

【说明】上段, 证明了定理 3. 请加一段“讨论”:

(这里, 没有讨论“奇偶归一”路径中, 出现循环的情况, 比如: “ $3n-1$ ”问题, 出现如下循环:

$7 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 14 \rightarrow 7$. 即: $7=\Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} E 5=\Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta}^2 A 7$.

笔者定义的操作, 在证明过程中, 结果都是向前跨出一个整数, 被转换数和目标数不在同一行, 故而, 值相异, 不可能出现“循环圈”。而如图 1 下部所示, 2 垂直向下到 1, 又从 1 转左向上到 2 (在如本文定义的操作下, 是 $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$), 完全是“画蛇添足”。因为“终极目标”是“归一”。不要求对 1 还进行“操作”, 这个回路, 不符合题意。故而, 本文特别在“引子”第 5 行, 用严格的算法定义问题: 第 2 步: “如果 $n=1$ 则结束。”即: 停机!)

6 一题解决, 只是更难问题的开始

有人说, $3n+1$ 问题不属“数论”问题, 有的人干脆说是“图论问题”。笔者认为, 数论就是论数。凡是数的成分、数的结构、数的运算, 数的变化……都是数论必须理论的……, 图有数的关系, 数可演化成图, 数是图的基础。笔者是十年前, 在加国看护外孙女的间隙, 设计了“两分划素数和图”发布在“加国无忧”“脸书”等社交网络上, 在国内的“QQ 空间”网上, 干脆起名叫“七彩数学”。没想到, 朋友们搜索中, 发现 2002 年 8 月, 第 24 届“国际数学家大会”在北京召开, 之前, 为迎接将召开的大会, 北京数学会绝版了多场科普性的报告会, 2007 年, 在其中一些报告基础上, 补充、改写成一套“七彩数学”的科普丛书, 由科学出版社出版。本文中心—关键数类, 是 Δ 数-E 数, 不是素数; 把“操作”从 $3n+1$

换成 $3n-1$ ，笔者发现，中心—关键数类换了，是 B 数 - A 数，也不是素数；但是， $n/2$ 的 2 和乘 3 的 3，是小素数吧。关键数类，恰巧是素数宿集，值得深入探讨。又出现“同而不和”，微小差别，引起“大相径庭”，发人深省。

最后再举另外一个比较著名的整数迭代函数 U。注意所有的整数可以分成偶数（ $2n$ 型）， $4n+1$ 型的数和 $4n+3$ 型的数，这三类，而 U 函数在这三类数上的定义分别为：

$$U(2n) = 3n; \quad U(4n+1) = 3n+1; \quad U(4n+3) = 3n+2.$$

这个迭代函数也是由考拉茨（Collatz）最先考虑过的。Murray Klamkin 在 1963 年提出一个公开的问题：整数 $n=8$ 在函数 U 的迭代下是否趋于无穷？

一般我们都认为应该会趋于无穷，比如迭代序列刚开始时是：

$$8 \rightarrow 12 \rightarrow 18 \rightarrow 27 (27=4*6+3) \rightarrow 20 \rightarrow 30 \rightarrow 45 (45=4*11+1) \\ \rightarrow 34 \rightarrow 51 \rightarrow 38 \rightarrow 57 \rightarrow \dots$$

但这样一个如此特殊的猜想到现在也依然无法证明。太难了！

$3n+1$ 猜想并非一个孤立的猜想，而是一大堆类似猜想中最简单，最有代表性的一个例子。仅仅是我们在这一大类问题里所碰到的最为简单，最为特殊的情形。 $3n+1$ 猜想本身也可以有许多的延拓和推广。[5] 特地推荐专著《终极挑战》^[9] 让大家参考关于这一类问题的最一般的表述和猜想，也铺陈有 $3n+1$ 猜想的历史内容。

继 [2] 之后，笔者又完成本篇，都是 [3] 的延续。感谢武汉大学李国平院士的教诲、并给 [3] 题签。感谢王元、方开泰（国际）院士创建“均匀设计”^[8] 的引导，中国数学会均匀设计分会刘理事长、张秘书长、辽、京、沪、台、港、澳、美国诸位同仁及武汉张凤祥教授对拙著 [3] 中某项工作的肯定。感谢舒湘芹和陈义章老师的关爱、翻译世界数学名著《高观点下的初等数学》的身教。感谢杨叔子院士回信讨论原子操纵问题^[10]。感谢武大 683 级校友的关心。特别感谢笔者身陷艰难困苦中时，华中科技大学计算机学院陈小苏教授、中南财经政法大学信息和安全工程学院萧慎勇前院长对我的探望、关怀。最深切地感谢加拿大 Y.R. “Mackenzie Richmond Hill 医院”心脏专科及南山医护中心 2018 年 11 月对我的救治。感谢国际 IEEE 学会会士、澳门科技大学伍乃骐讲座教授的指教，审定、修改英文稿。还要感谢中学校友曹耕清和陈桂发，传来宝贵信息，让笔

者两次调整论文内容;感谢中财法大工程学院熊平教授引荐了投稿门路。最后,感谢吾妻、女的长期容忍和照料,外孙女 Alyson · G 的帮助。

参考文献

- [1] Wang M Z, Yang Y B, He Z X, et al. The Proof the $3x+1$ Conjecture [J].
Avances in pure Math. Monthly, 2022 (92): 10–28.
- [2] 钱进. 素数分两半——SJTU-125 全球“科学”问第一题的思考 [J]. 理
论数学前沿, 2021, 3 (4): 55–70.
- [3] 钱进. 均匀设计原理及自动实现 [M]. 香港: 中国科学文化出版社,
2002: 8.
- [4] Jeffrey C, Lagarias. The $3x+1$ Problem and its Generalizations [J]. Amer.
Math. Monthly, 1995 (92): 3–23.
- [5] 民间数学家. $3n+1$ 猜想: 遥远而又神秘未知世界投射过来的一缕微光 [EB/
OL]. [2019-03-18]. https://page.om.qq.com/page/O26ym9S9y7SCNyWB-KpDW_Mw0.
- [6] 丘成桐. 丘成桐诗文集 (增订) [M]. 长沙: 岳麓书社, 2011.
- [7] P · Ribenboim. The Little Book of Bigger Primes (Second edition) [M]. N.
Y. Springer Inc, 2004.
- [8] Fang K T, Wang Y. Number—Theoretic Method in Statistics [M]. Chapman
and Hall, London, 1996.
- [9] [古希腊] 欧几里得. 几何原本《EUCLID's ELEMENTS》13 卷图释
全本 [M]. 燕晓东, 译. 南京: 凤凰出版传媒集团, 江苏人民出版社,
2011: 3.
- [10] [加拿大] P · 里本伯姆. 博大精深的素数 [M]. 孙淑玲, 冯克勤, 译.
北京: 科学出版社, 2006.
- [11] 杨叔子. 现代工程技术的发展态势与我们的对策 [R] // 周光召, 朱光亚.
共同走向科学——百名院士科技系列报告 (中). 北京: 科学出版社,
1995.

Solving Difficult Problems and Twinkling Stars —Rethinking of Global “Science” Asks № 1 in Question SJTU-125

JIN Chien

ORCID 0000-0001-8201-2360

Zhongnan University of Economics and Law, Wuhan, China

Abstract: This paper now uses the “number core” structure that was found in the “prime number divided into two halves”, will make traditional number theory problems, for example, the “ $3n+1$ conjecture” question to become simple. To pays attention to the changes in the “number of rows” corresponding to all kinds of positive integers, especially the E number, in the “parity normalization” operation, and successfully finds out the “unification” path, Different stars and colors are used to mark numbers, revealing the beauty of mathematics, and once again confirming “the source of thousands of numbers, testing thousands of numbers”, “same but not harmonious”, subtle differences make prime numbers so special.

Key words: Number kernel; Parity normalization operation $\Gamma\alpha\beta$; “parity normalization” problem; $\Delta\delta$ number; $E\epsilon$ number; Constellation pattern; Astronomical map

附录

2 图例 1。○，A α 数 ⊥ 7，B β 数 ⑧ 8；Γ γ 数 ∠ 9，Δ δ 数 ⊕ 16，E ε 数 ☆ 5，Z ζ 数 ⑥ 12。

| | | | | | | | | | | |
|---|--|--|---|---|--|---|--|--|--|----------------------|
| 1⑥ 24576 2⑧ 18 3⑧ 112 4 ⊥ 19 5⑧ 116 6 ∠ 117 7⑧ 704 8⑧ 720 9⑧ 724 A ☆ 725 B⑧ 4352 C⑧ 4416 D⑧ 738 E⑧ 4432 F ⊥ 739 G⑧ 4436 H ∠ 4437 I⑧ 26624 J⑧ 120 K⑧ 122 L⑧ 736 M⑧ 744 N⑧ 746 O⑧ 4480 P⑧ 4512 Q ∠ 753 R⑧ 4520 S⑧ 4522 T⑧ 27136 U⑧ 27264 V⑧ 4548 W ⊥ 4549 X⑧ 37296 Y⑧ 4550 Z⑧ 27304 a⑧ 27306 b⑧ 163840 c⑧ 17232 d⑧ 4800 e⑧ 4816 f ☆ 803 g⑧ 4820 h ∠ 4821 i⑧ 28928 j⑧ 28992 k⑧ 4834 l⑧ 29008 m ☆ 4835 n⑧ 29012 o ∠ 29013 p⑧ 174080 q⑧ 804 r ⊥ 805 s⑧ 4832 t⑧ 806 u⑧ 4840 v⑧ 4842 w⑧ 29056 x⑧ 29088 y ⊥ 4849 z⑧ 29096 1⑧ 29098 2⑧ 174592 3⑧ 174720 4⑧ 29124 5 ⊥ 29125 6⑧ 174752 7⑧ 29126 8⑧ 43690 9⑧ 43693 A⑧ 1048576 B⑧ 24576 | 1⑥ 12288 2 ∠ 9 3⑧ 56 4⑧ 58 5⑧ 352 6⑧ 360 7⑧ 362 8⑧ 2176 9⑧ 2208 A ∠ 369 B⑧ 2216 C⑧ 2218 D⑧ 13312 E⑧ 60 F ⊥ 61 G⑧ 368 H⑧ 372 I ⊥ 373 J⑧ 2240 K⑧ 2256 L⑧ 2260 M ☆ 2261 N⑧ 13568 O⑧ 13632 P⑧ 2274 Q⑧ 13648 R ⊥ 2275 S⑧ 13652 T ∠ 13653 U⑧ 81920 V⑧ 86016 W⑧ 2400 X⑧ 2408 Y ☆ 2410 Z⑧ 14464 a⑧ 14496 b ☆ 2417 c⑧ 14504 d⑧ 14506 e⑧ 87040 f⑧ 402 g⑧ 2416 h ⊥ 403 i⑧ 2420 j ∠ 2421 k⑧ 14528 l⑧ 14544 m⑧ 14548 n ☆ 14549 o⑧ 87296 p⑧ 87360 q⑧ 14562 r⑧ 87376 s ⊥ 14563 t⑧ 87380 q ∠ 87381 u⑧ 262144 C⑧ 12288 | 1⑥ 6144 2⑧ 28 3 ☆ 29 4⑧ 176 5⑧ 180 6 ⊥ 181 7⑧ 1088 8⑧ 1104 9⑧ 1108 A ☆ 1109 B⑧ 6656 C⑧ 30 D⑧ 184 E⑧ 186 F⑧ 1120 H⑧ 1128 G⑧ 1130 I⑧ 6784 J⑧ 6816 K ∠ 1137 L⑧ 6824 M⑧ 6826 N⑧ 40960 O⑧ 43008 P⑧ 1200 Q⑧ 1204 R ☆ 1205 S⑧ 7232 T⑧ 7248 U⑧ 7252 V ☆ 7253 W⑧ 43520 X ∠ 201 Y⑧ 1208 Z⑧ 1210 a⑧ 7264 b⑧ 7272 c⑧ 7274 d⑧ 43648 e⑧ 43680 f ∠ 7281 g⑧ 43688 h⑧ 43690 i⑧ 262144 D⑧ 6144 | 1⑥ 3072 2⑧ 14 3⑧ 88 4⑧ 90 5⑧ 544 6⑧ 552 7⑧ 554 8⑧ 3328 9 ⊥ 15 A⑧ 92 B ∠ 93 C⑧ 560 D⑧ 564 E ⊥ 565 F⑧ 3392 H⑧ 3408 G⑧ 3412 I ☆ 3413 J⑧ 20480 K⑧ 21504 L⑧ 600 M⑧ 602 N⑧ 3616 O⑧ 3624 P⑧ 3626 Q⑧ 21760 R⑧ 604 S ☆ 605 T⑧ 3632 U⑧ 3636 V ⊥ 3637 W⑧ 21824 X⑧ 21840 Y⑧ 21844 Z ☆ 21845 a⑧ 131072 b⑧ 3072 17 层 | 1⑥ 1536 2 ⊥ 7 3⑧ 44 4 ∠ 45 5⑧ 272 6⑧ 276 7 ⊥ 277 8⑧ 1664 9⑧ 46 A⑧ 280 B⑧ 282 C⑧ 1696 D⑧ 1704 E⑧ 1706 F⑧ 10240 H⑧ 10752 G⑧ 300 I ⊥ 301 J⑧ 1808 K⑧ 1812 L ⊥ 1813 M⑧ 10880 N⑧ 302 O⑧ 1816 P⑧ 1818 Q⑧ 10912 R⑧ 10920 S⑧ 10922 T⑧ 65536 b⑧ 1536 16 层 | 1⑥ 768 2⑧ 22 3⑧ 196 4⑧ 138 5⑧ 832 6⑧ 852 7 ⊥ 853 8⑧ 848 9⑧ 852 A⑧ 5120 C⑧ 5120 D⑧ 2688 E⑧ 150 F⑧ 904 G⑧ 452 H⑧ 906 I ⊥ 151 J⑧ 908 K ∠ 909 L⑧ 5440 M⑧ 5456 N⑧ 5460 O⑧ 32768 P⑧ 768 15 层 | 1⑥ 384 2 ☆ 11 3⑧ 68 4 ∠ 69 5⑧ 416 6⑧ 426 7⑧ 424 8⑧ 426 9⑧ 2560 A⑧ 1344 B ∠ 75 C⑧ 452 D ∠ 453 E⑧ 2720 F⑧ 454 G⑧ 4096 H⑧ 2728 I ⊥ 136 J⑧ 8192 K⑧ 384 L⑧ 192 M⑧ 96 N⑧ 96 14 层 | 1⑥ 192 2⑧ 34 3⑧ 208 4 ☆ 35 5⑧ 212 6 ∠ 213 7⑧ 1280 8⑧ 672 9⑧ 226 7 ☆ 113 A⑧ 1360 B ☆ 227 C⑧ 1364 D ∠ 136 E⑧ 4096 F⑧ 96 G⑧ 96 H⑧ 2048 I⑧ 1024 J⑧ 512 K⑧ 7⑧ 12 层 | 1⑥ 96 2 ☆ 17 3⑧ 104 4 ⊥ 52 5⑧ 106 6 ∠ 213 7⑧ 320 8⑧ 336 9⑧ 16 8 A⑧ 160 B⑧ 84 C⑧ 42 D⑧ 160 E⑧ 80 F⑧ 4⑧ 11 层 | 1⑥ 48 4 2⑧ 26 3 ☆ 53 4⑧ 160 5⑧ 16 6⑧ 84 7 ☆ 341 8⑧ 512 9⑧ 7⑧ 9 层 | 1⑥ 2 12 2 ⊥ 13 |
|---|--|--|---|---|--|---|--|--|--|----------------------|

图 4 江山统一地域图（数据和“天象图”对照，注意奇数向黄色喲塔数汇流）

Figure 4 Jiangshan unified area map