

Stability analysis of nonlinear vibration system

Li Fei* Wen Minxia

Hunan University of Technology, Zhuzhou

Abstract: In this paper, the vibration equation of charged ring point charge system is established by using the theory of electromagnetics. The stability of the system under different conditions is discussed. For the nonlinear vibration system, the curve and phase diagram of the recovery force and energy with displacement are made by using the maple calculation drawing, and the period of the nonlinear vibration system is calculated.

Key words: Nonlinear equation; Stability; Phase diagram

Received: 2019-07-01; Accepted: 2019-07-29; Published: 2019-08-08

非线性振动系统的稳定性分析

李 飞* 温敏霞

湖南工业大学, 株洲

邮箱: feili_li@qq.com

摘 要: 利用电磁学理论建立了带电圆环点电荷系统振动方程, 讨论了系统在不同条件下的稳定性, 对非线性振动系统, 利用 Maple 计算绘图, 分别作出了回复力和能量随位移的变化曲线、相图, 求出了非线性振动系统的周期。

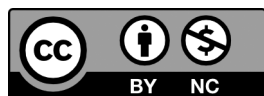
关键词: 非线性方程; 稳定性; 相图

收稿日期: 2019-07-01; 录用日期: 2019-07-29; 发表日期: 2019-08-08

Copyright © 2019 by author(s) and SciScan Publishing Limited

This article is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



1 振动方程

如图 1 所示, 在通过点电荷中心 O 点且垂直于圆环平面的 x 轴上的 $\pm l$ 处分别固定两个均质带电圆环, 其半径均为 R , 质量均为 m 且均匀地分布着总电量均为 q ($q > 0$) 的电荷。已知点电荷电量为 Q ($Q > 0$), 质量均 m 。假设点电荷仅能在 x 轴上平动, 设 $t=0$ 时, 外力作用使点电荷静止于距平衡位置 O 的距离为 $x=A$ ($0 < A < l$), 当外力撤除时, 点电荷在光滑水平面上沿 x 轴作微小的横振动。若略去阻尼影响, 我们把这样的系统称为均质带电圆环点电荷振子系统。

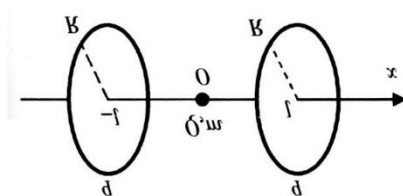


图 1 带电圆环点电荷振动系统

由电磁学知 [1], O 点左侧带电圆环在点电荷 O 处的电场强度指向正 x 轴方向, O 点右侧带电圆环在点电荷 O 处的电场强度指向负 x 轴方向, 电场强度的大小均为

$$E = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

其中 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ 为真空中的介电常数。

两个带电圆环对点电荷 Q 的电场力大小均为

$$F = \frac{Qql}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2)$$

由于两力大小相等, 方向相反, 故点电荷 Q 在 $x=0$ 位置是平衡位置。

取点电荷偏离平衡位置 O 的坐标为 x , 它所受两带电圆环的合力 F_x 为

$$F_x = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{l+x}{[(l+x)^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{l-x}{[(l-x)^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}, \quad (3)$$

由牛顿定律知, 点电荷的振动方程为

$$m\ddot{x} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{l+x}{[(l+x)^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{l-x}{[(l-x)^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}. \quad (4)$$

2 稳定性分析

由式 (3) 知, 在平衡位置 $x=0$, 有

$$F_x|_{x=0} = 0. \quad (5)$$

为了讨论平衡位置 $x=0$ 的稳定性, 需计算 F'_x , 由式 (3) 得

$$F'_x = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{2(l+x)^2 - R^2}{[(l+x)^2 + R^2]^{\frac{5}{2}}} + \frac{2(l-x)^2 - R^2}{[(l-x)^2 + R^2]^{\frac{5}{2}}} \right\}, \quad (6)$$

在 $x=0$ 处, 有

$$F'_x = -\frac{qQ(2l^2 - R^2)}{2\pi\epsilon_0 (l^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (7)$$

2.1 $R=0$

当 $R=0$ 时, 则带电圆环退化为一个点电荷, 由式 (7) 知

$$F'_x|_{x=0} = -\frac{qQ}{\pi\epsilon_0 l^3} < 0. \quad (8)$$

故 $x=0$ 为稳定平衡位置。

2.2 $R > 0$

(a) 假设 $l > R/\sqrt{2}$ 由式 (7) 知, $F'_x|_{x=0} < 0$, 则 $x=0$ 为稳定平衡位置;
 (b) 假设 $l > R/\sqrt{2}$ 由式 (7) 知, $F'_x|_{x=0} > 0$, 则 $x=0$ 为不稳定平衡位置;
 (c) 假设 $l = R/\sqrt{2}$ 由式 (7) 知, $F'_x|_{x=0} = 0$, 由于在 $x=0$ 处, $F'_x|_{x=0} = 0$, 为判定平衡位置 $x=0$ 是否稳定, 需要进一步讨论在 $x=0$ 位置两侧 F_x 的正、负。

将 $R^2=2l^2$ 代入式 (6) 化简得

$$F'_x = -\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(3l^2)^{\frac{5}{2}}} \left[\frac{2l+x}{(1+\frac{2lx+x^2}{3l^2})^{\frac{5}{2}}} - \frac{2l-x}{(1+\frac{-2lx+x^2}{3l^2})^{\frac{5}{2}}} \right]. \quad (9)$$

因 $x=A$ ($0 < A < l$) 为小量, 将式 (9) 括号中的项展开成 Taylor 级数, 略去 x^2 以上小量, 得

$$(1+\frac{2lx+x^2}{3l^2})^{-\frac{5}{2}} \approx 1 - \frac{5}{2}(\frac{2lx+x^2}{3l^2}) \approx 1 - \frac{5x}{3l} \quad (10)$$

同理

$$(1+\frac{-2lx+x^2}{3l^2})^{-\frac{5}{2}} \approx 1 - \frac{5}{2}(\frac{-2lx+x^2}{3l^2}) \approx 1 + \frac{5x}{3l} \quad (11)$$

将式 (10)、(11) 代入式 (9) 并化简得

$$F'_x = \frac{7qQx^2}{27\sqrt{3}\pi\epsilon_0 l^5} \quad (12)$$

由式 (12) 知, 在 $x=0$ 位置两侧, 恒有。故当 $l = R/\sqrt{2}$ 时, $x=0$ 位置为不稳定平衡位置。

由上面讨论可知, 结论可归纳如下

$\left\{ \begin{array}{l} \text{当 } R=0 \text{ 时, } x=0 \text{ 位置为稳定平衡位置,} \\ \text{当 } l > R/\sqrt{2} (R > 0) \text{ 时, } x=0 \text{ 位置为稳定平衡位置,} \\ \text{当 } l \leq R/\sqrt{2} (R > 0) \text{ 时, } x=0 \text{ 位置为不稳定平衡位置.} \end{array} \right.$

3 变化曲线及相图

由式 (3) 知, 点电荷偏离平衡位置 O 的坐标为 x 时所受合力 F_x 为

$$F_x = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{l+x}{[(l+x)^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{l-x}{[(l-x)^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} =$$

$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0(l^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \left[(l+x) \left(1 + \frac{2lx+x^2}{l^2 + R^2} \right)^{-\frac{3}{2}} - (l-x) \left(1 + \frac{-2lx+x^2}{l^2 + R^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right],$$

将上式括号中的项展开成 Taylor 级数, 化简得

$$F_x = -\frac{qQ(2l^2 - R^2)}{2\pi\epsilon_0(l^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}}x - \frac{3qQ}{4\pi\epsilon_0(l^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}}x^3 \quad (13)$$

为简单计, 令

$$k = \frac{qQ(2l^2 - R^2)}{2\pi\epsilon_0(l^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}}, \beta = \frac{3qQ}{4\pi\epsilon_0(l^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad (14)$$

则点电荷所受回复力 F_x 为

$$F_x = -kx - \beta x^3 \quad (15)$$

3.1 当 $l \neq R/\sqrt{2}$ 时

由于 $x = A$ ($0 < A < l$), 由式 (15) 略去 x^3 得

$$F_x \approx -kx \quad (16)$$

可见点电荷所受回复力 F_x 为一直线, 说明此时 F_x 为线性回复力, 点电荷在 $x=0$ 位置作简谐振动, 其振动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (17)$$

3.2 当 $l = R/\sqrt{2}$ 时

3.2.1 $F_x - x$ 变化曲线

当 $l = R/\sqrt{2}$ 时, 由式 (14) 知, $k=0$, 此时则点电荷所受回复力 F_x 为

$$F_x = -\beta x^3 \quad (18)$$

F_x 为非线性回复力, 点电荷作非线性振动。取 $R=0.10\text{m}$, $l=R/\sqrt{2}=0.05\sqrt{2}\text{m}$, $|x| \leq 0.10\text{m}$, $Q=2q=2.0 \times 10^{-6}\text{C}$, 利用式 (18) 和 Maple 计算机绘图 [2], 得到 $F_x - x$ 变化曲线如图 2 所示。

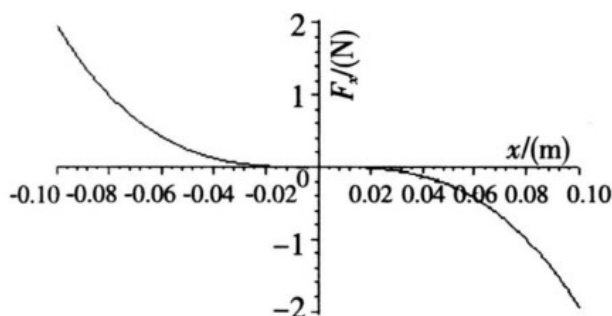


图 2 $F_x - x$ 变化曲线

3.2.2 能量变化曲线

由于 F_x 为保守力, 引入势能, 取 $x=0$ 位置为势能零点, 由合力 F_x 与势能 $E_p(x)$ 的关系 $F_x = -\frac{dE_p(x)}{dx}$ 知, 带电圆环点电荷振子在 x 处的势能 $E_p(x)$ 为

$$E_p(x) = \frac{1}{4}\beta x^4 \quad (19)$$

由机械能守恒知, 质量为 m 的带电质点在 A 处从静止释放的势能等于质点在任意位置 x 处的动能和势能之和, 故质点在任意位置 x 处的动能 $E_k(x)$ 为

$$E_k(x) = E_p(A) - E_p(x) = \frac{1}{4}\beta(A^4 - x^4) \quad (20)$$

利用式 (19)、式 (20) 和 Maple 计算机绘图, 得到能量变化曲线如图 3 所示 (其中虚长划线为 $E_k(x)$, 实线为 $E_p(x)$, 虚短划线为 $E(x)$)。

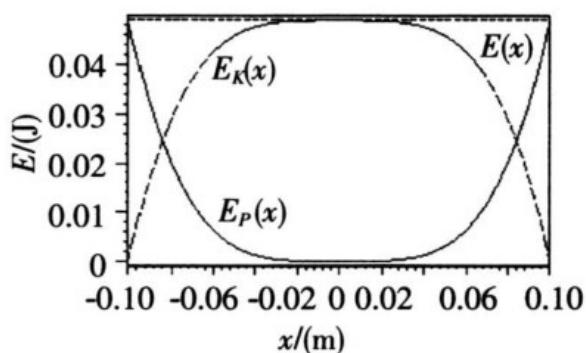


图 3 能量变化曲线

3.2.3 相图 $v - x$ 变化曲线

由式 (19) 知, 质量为 m 的带电质点在任意位置 x 处的速度 $v(x)$ 为

$$v(x) = \pm \sqrt{\frac{2E_K(x)}{m}} = \pm \sqrt{\frac{\beta}{2m}(A^4 - x^4)} \quad (21)$$

取 $Q=2q=2.0 \times 10^{-6} \text{C}$, $-0.10 \leq x \leq 0.10 \text{m}$, $R=0.10 \text{m}$, $l=R/\sqrt{2}=0.05\sqrt{2} \text{m}$, $m=1 \text{kg}$ 。利用式(21)和 Maple 计算机绘图, 得到相图 $v-x$ 变化曲线如图4所示。

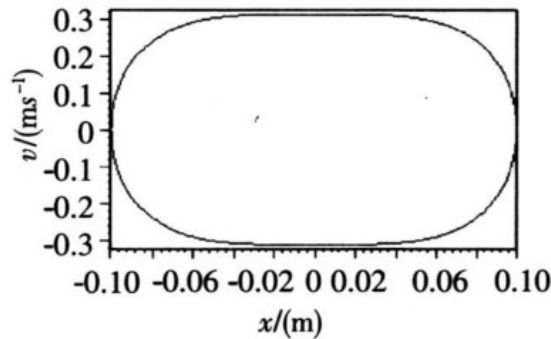


图4 相位 $v-x$ 变化曲线

4 振动周期

4.1 振动周期

带电质点从 $x=A$ 处静止释放后, 将围绕 O 点往复振动的周期 T 为

$$T = 2 \int_{-A}^A \frac{dx}{v} = 4 \sqrt{\frac{2m}{\beta}} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^4 - x^4}} \quad (22)$$

由第一类椭圆积分公式, 有

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)(b^2-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} F(\arccos \frac{x}{b}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

利用上面两个公式, 有

$$\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^4 - x^4}} = \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{(A^2+x^2)(A^2-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}A} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (23)$$

查数学公式表得 [3] $F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1.8541$,

故带电质点振动的周期 T 为

$$T = \frac{4}{A} \sqrt{\frac{m}{\beta}} F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{7.4164}{A} \sqrt{\frac{m}{\beta}} \quad (24)$$

4.2 $T-A$ 变化曲线

取 $l=R/\sqrt{2}=0.05\sqrt{2} \text{m}$, $Q=2q=2.0 \times 10^{-8} \text{C}$, $0 \leq x \leq 0.10 \text{m}$, $R=0$

.10 m, $m=1$ kg。由式(24)和Maple计算机绘图,得到 $T-A$ 变化曲线如图5所示。

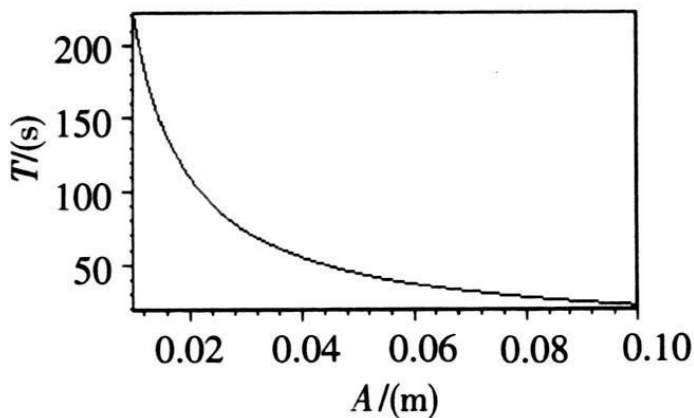


图5 $T-A$ 变化曲线

5 结论与讨论

(1) 由图2可知,在平衡位置 $|x_0| \leq 0.02$ 附近, $F_x \rightarrow 0$,由 $F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}$ 知, $\frac{\partial E_P}{\partial x} \rightarrow 0$,导致 $E_P(x)$ 变化曲线在平衡位置 $|x_0| \leq 0.02$ 附近变得较平坦,与图3完全吻合。

(2) 由图4可知,相图 $v-x$ 为一封闭曲线,表明带电圆环点电荷振子系统做周期运动;在振幅位置, $\dot{x}(0)=0$,在平衡位置 $|x_0| \leq 0.02$ 附近,速率最大。在平衡位置 $|x_0| \leq 0.02$ 附近,由于 $F_x \rightarrow 0$,使得 $d\dot{x}/dx \rightarrow 0$,与图4十分吻合。

(3) 由式(24)和图5可知,带电圆环点电荷振子系统在平衡附近的小振动,为非线性谐振动,其振动的周期与振幅 A 成反比。

参考文献

- [1] 贾起民,郑永令,陈暨耀.电磁学[M].北京:高等教育出版社,2001:20-21.
- [2] 黎捷.MAPLE9.0符号处理及应用[M].北京:科学出版社,2004:156-159.
- [3] 王梓坤.常用数学公式大全[M].重庆:重庆出版社,1991:465-467.