动力系统研究
2020 年 3 月第 2 卷第 1 期

Proof of keeping sensitive dependence of function initial value based on topological dynamical system

Wu Junyi

Jiangnan University, Wuxi

Abstract: In the topological dynamical system, by studying the sensitive dependence of the initial value of the function, using the knowledge of topology and dynamical system, we guess and prove whether it can be transferred under the topological conjugate, find the compactness of the domain to be defined, and give the proof process.

Key words: Topological dynamical system; Sensitive dependence on initial value; Compactness; Homeomorphism

Received: 2020-02-05; Accepted: 2020-02-20; Published: 2020-02-22

文章引用：吴俊义. 基于拓扑动力系统的函数初值敏感依赖性的保持证明[J]. 动力系统研究，2020，2(1)：16-21.
https://doi.org/10.35534/sds.0202003

基于拓扑动力系统的函数初值敏感依赖性的保持证明

吴俊义

江南大学，无锡

邮箱：jywu8@qq.com

摘　要：在拓扑动力系统中，通过对函数初值的敏感依赖性的性质的研究，利用所学的拓扑学和动力系统知识，猜想并证明其可否在拓扑共轭下加以传递，发现需要定义域的紧致性，并给出了证明过程。

关键词：拓扑动力系统；对初值的敏感依赖性；紧致；同胚

收稿日期：2020-02-05；录用日期：2020-02-20；发表日期：2020-02-22

https://doi.org/10.35534/sds.0202003

1 引言

1975 年由李天岩和 York 第一次用数学语言刻画了线段上连续自映射的混沌现象，现在混沌的概念已经广泛被应用到各个学科，动力系统的研究已经越来越受人们关注和重视，但迄今为止混沌还没有一个完整统一的定义。关于拓扑动力系统混沌形态的研究可以追溯到 Ruelle 和 Takens，他们认为混沌的系统便是对初值敏感依赖的传递系统。李天岩和 York 则认为一个系统中如果有一个不可数的攀援集（scrambled set），这个系统便是混沌的。Devaney 定义对于初值敏感的周期点集稠密的传递系统为混沌系统。可见对初值敏感依赖是混沌动力系统的一个很重要的性质，熊金城推广了“对初值敏感依赖”这一概念。本文在此基础上研究在拓扑共轭下对初值的敏感依赖性是否保持，如果不能保持，那么能否加什么限制条件使其保持。

2 预备

本文设 X 是一个拓扑空间，f: $X \to X$ 是一个把 X 映射到自身的连续自映射。对于任一 $n \in Z^{+}$，定义函数 f 的 n 次拷贝的复合 $f^{n}(x)=fofo\Lambda of(x)$。

定义 1 设 f: $X \to X$ 定义的动力系统，是一个函数族 $\{f^{n}\}_{n\in z+}$ 其中 fn 是 X 的一个连续自映射。

定义 2 设 X 是一个拓扑空间函数 f: $X \to X$ 称为混沌的或具有混沌，如果

（1）f 的周期点的集合在 X 中是稠密的；

（2）对于 X 中的任意开集 U 与 V，存在 $x \in U$ 与 $n \in Z^{+}$，使得 $f^{n}(x) \in V$。

定义 3 设 (X, d) 是一个度量空间，函数 f: $X \to X$ 有对初值条件的敏感依赖性，如果存在一个 $\delta>0$，使得对于任一 $x \in X$ 及 $\varepsilon>0$，存在 $y \in Bd(x, \varepsilon)$ 及 $n \in Z^{+}$，使得 $d(f^{n}(x), f^{n}(y))>\delta$，其中 δ 称为 f 的敏感性常数。

定义 4 拓扑空间称为紧致的，如果它的每个开覆盖都有有限子覆盖。

定义 5 如果 f: $X \to Y$ 是一一对应并且 f 及其逆 f^{-1}: $Y \to X$ 都是连续的，则称 f 是一个同胚映射，或称拓扑变换。

定义 6 如果两空间（X，f），（Y，g）存在同胚映射 h：$X\to Y$，使得：$hf=gh$，则称 f 和 g 拓扑共轭，定理 1 设 X 是一个度量空间，f：$X\to X$ 是连续且混沌的，那么，f 具有对初值的敏感依赖性。

3　想法的证明

想要证明在拓扑共轭下对初值的敏感依赖性是否保持，即看看有没有反例使得存在从 f 到 g 的拓扑共轭 h，其中 f 是初值敏感的，g 不是初值敏感的。

设 f：（1，∞）→（1，∞）由 $f(x)=2x$ 定义，再设 g：$R^+\to R^+$ 由 $g(x)=1+x$ 定义，证明（1）f 存在对初值条件的敏感依赖性，但 g 没有。

（2）能够找到一个明确的同胚 h：（1，∞）→ R^+，使得 f 与 g 是拓扑共轭的。

证明 $\forall x\in(1,\infty)$，有 $\forall\varepsilon>0$，$y\in B_d(x,\varepsilon)$，

$d(f^n(x),f^n(y))=|2^nx-2^ny|=2^n|x-y|$，

在这里我们设 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，则显然 $2^n|x-y|>2^n\frac{1}{2^n}=1=\delta$。

可见存在 $y\in B_d(x,\varepsilon)$ 和 $n\in Z^+$，使得 $d(f^n(x),f^n(y))>\delta$，从而 f 是对初值敏感依赖的。

而 $\forall x\in R^+$，$\forall\varepsilon>0$，有 $y\in Bd(x,\varepsilon)$，

$y\in B_d(x,\varepsilon)$，$d(f^n(x),f^n(y))=|(1-x)-=|x-y|<\varepsilon$，显然 g 没有。

通过观察，发现初等函数中指数函数进过变换可以把两个空间联系起来，不妨设 $h(x)=\ln(x-1)$。下面我们来证 h 是同胚映射。首先由于 h 的单调性，则一一对应满足。

$\forall x,x+t\in(1,\infty)$，

当 $t\to 0$ 时，有 $\ln(x+t-1)-\ln(x-1)=\ln(1+\frac{t}{x-1})\to 0$，显然 h 是连续的，且任取 x，$x+1\in R^+$，有 $h^{-1}(x)=e^x+1$，当 $t\to 0$ 时，$(e^x+t+1)-(e^x+1)=e^x(e^t-1)\to 0$，显然 h^{-1} 是连续的。

可见，对初值条件的敏感依赖性，在拓扑共轭下一般不保持。

这是我们便想要知道，能否加上什么条件，使得在拓扑共轭下能够保持对初值的敏感依赖性。我们可以发现（1，∞）与 R^+ 同胚，都是非紧致的。 这时

https://doi.org/10.35534/sds.0202003

我们就想：如果我们限于在一个紧致的定义域，那么上述依赖性会不会保持。

设 X，Y 是分别具有度量 d_X，d_Y 的紧致度量空间。假定 f：$X \to X$ 存在以 δ 为敏感常数的对初值的敏感依赖性，并假定 g：$Y \to Y$ 在同胚 h：$X \to Y$ 下与 f 是拓扑共轭的，我们来证 g 存在敏感常数，使其对初值的敏感依赖性。

证明

(1) 设 $C = \{ (y_1 , y_2) \in Y \times Y | d_X(h^{-1}(y_1) ,$
$h^{-1}(y_2)) > \delta \}$

因为 X 是紧致的，所以任一开覆盖都有有限子覆盖，在此任取一开覆盖的有限子覆盖$\{ U_i \}_{i=1}^{n}$，

设 $V_i = \{ y | d(x , y) > \delta, x \in U_i , i = 1 , 2 , \cdots ,$
$n\}$，则

$$V_i^c = \{ z | d(x , z) < \delta, x \in U_i \} ,$$

可见/ Ui 中开集 B（x， ε ），一定有$B(z, \frac{\varepsilon}{2}) \subset V_i^c$

所以 V^c_i 为开集，则 V_i 为闭集。由紧致集的闭子集是紧致的，得 Vi 为 X 中的紧致集，即有有限的子覆盖$\{ V_i^s \}_{s=1}^{m}$，

可见$\{ (x_1 , x_2) \in X \times X | d(x_1 , x_2) > \delta \}$有有限子覆盖$U_i \times V_i^s = \omega$

又因 h 为同胚映射，紧致空间在同胚映射下的像也是紧致的，所以一定有 $Y \times Y$ 中 C 的有限开覆盖 h（ω ）。

则 C 是紧致的。又因为定义在禁止空间上的连续函数有界，并能达到最小值，所以 C 中一定有最小值，我们不妨设为 δ^*。

（2）下面我们证明 g 存在以 δ^* 为敏感常数的，对初值条件的敏感依赖性。

在这里可见距离空间为 *Hausdorff* 空间，则紧致子集都为闭集，在我们以前学过的，以闭集为定义域的连续函数一致连续。

因为 h 为同胚映射，X，Y 都为紧致空间，$\varepsilon_0 > 0$，则一定有

$\forall d_X(x_1 , x_2) < \varepsilon$，$\exists d_Y(y_1 , y_2) < \varepsilon_0$，其中 x_i
$\in X$，$y_i \in Y$

由于 X 是紧致的且 f 对初值敏感依赖的，敏感常数为 δ，则有$d_X(f^n(x_1) ,$ $f^n(x_2)) > \delta$。显然$hf^n(x_1) , hf^n(x_2) \in C$,且$d_Y(hf^n(x_1) , hf^n(x_2)) > \delta^*$。

所以，根据同胚函数的一一对应性，在 Y 中一定有 $d_Y(y_1, y_2) < \varepsilon_0$，使得 $d_Y(g^n(y_1), g^n(y_2)) > \delta^*$。

4 结论

对初值敏感依赖性在动力系统的研究中具有极其重要的作用，反映了混沌的基本形态，在本文中通过研究发现，在紧致的前提下，初值敏感依赖性可通过拓扑共轭加以传递。

参考文献

[1] LI T Y，Yorke J A．Period three implies chaos [J]．A N Month，1975（82）：985–992.

[2] Devanney R．An Introduction to chaotic dynamical systems [M]．Reading M A：Addison–Wesley，1989.

[3] 尤承业．基础拓扑学讲义 [M]．北京：北京大学出版社，1997：21–32，50–58.

[4] 周作领．符号动力系统 [M]．上海：上海科技教育出版社，1997.

[5] 叶向东，黄文，邵松．拓扑动力系统概论 [M]．北京：科学出版社，2005.

https://doi.org/10.35534/sds.0202003