

The complex chaotic behavior of a class of dynamic systems with multiple degrees of freedom and gaps

Xia Wentao

Jiangxi University of Science and Technology, Nanchang

Abstract: Based on multi-degree-of-freedom impact oscillators with clearances , equations for the system away from impact and complicated impact situation and corresponding impact governing equations, with Runge-Kutta method to numerical simulation, the paper reveals that systems have complex chaotic motions. Theoretical analysis shows that delay feedback control can control system validity, phase plane portrait and time series also display that this method can control chaotic impact motions operative to periodic orbits.

Key words: Clearance; vibro-impact; Chaotic; Delay feedback ; Chaotic controlling

Received: 2020-02-25; Accepted: 2020-03-11; Published: 2020-03-13

一类含间隙多自由度动力系统的复杂混沌运动行为

夏文涛

江西理工大学, 南昌

邮箱: wtxia.00@163.com

摘要: 在一类含间隙多自由度动力系统的力学模型的基础上, 根据系统在无碰撞情况下的无量纲微分方程和相应的无量纲冲击方程, 利用龙格—库塔数值仿真方法揭示了系统存在复杂的混沌运动行为。理论分析了延迟反馈方法对混沌控制的有效性, 相图和时间历程图均表明该方法能将系统的混沌行为有效地控制到周期轨道。

关键词: 间隙; 碰撞振动; 混沌; 延迟反馈; 混沌控制

收稿日期: 2020-02-25; 录用日期: 2020-03-11; 发表日期: 2020-03-13

Copyright © 2019 by author(s) and SciScan Publishing Limited

This article is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



多自由度振动系统在工程应用领域中经常遇到, 尤其需要注意冲击振动系

统由于参数的变化所引起系统响应的本质变化,如高速列车的蛇行、汽车的前轮摇摆、压杆的动态屈曲现象等,都可能产生分岔或混沌现象,导致系统的动态失稳,这种失稳将会造成动力学结构的重大破坏,故在振动机械和装置的动力学优化设计、提高系统可靠性及降低噪声等方面,对多自由度振动系统动力学特性的研究具有重要的意义。

1 系统的力学模型

图1是多自由度含间隙动力系统的力学模型。质量为 M_1 的振子分别由刚度为 K 的线性弹簧和阻尼系数为 C 的线性阻尼器联接于支承,并受简谐激振力 $P_1 \sin(\Omega T + \tau)$ 的作用。其中体积大小相等的小球 M_2 、 M_3 、 M_4 在振子槽中做水平方向的运动。取 M_3 振子平衡位置作为坐标原点,取右方向为位移正方向。在该动力学系统中,当小球 M_3 与振子的相对位移为 $-D$ 时,小球 M_2 与振子左侧挡板发生相互碰撞,改变速度方向后,又以新的初值运动。当小球 M_4 与振子的相对位移为 D 时,小球 M_4

与振子右侧挡板发生相互碰撞,改变速度方向后,又以新的初值运动。若小球 M_2 与小球 M_3 的相对位移为零时,小球 M_2 与小球 M_3 发生相互碰撞。若小球 M_4 与小球 M_3 的相对位移为零时,小球 M_4 与小球 M_3 发生相互碰撞。振子 M_1 ,小球 M_2 , M_3 , M_4 彼此之间就是这样相互碰撞,以新的初值运动,然后再次碰撞,如此往复。该模型广泛应用于建筑减振系统,在实际模型中,振子 M_1 的体积远远大于小球的体积,故可将小球的体积忽略。

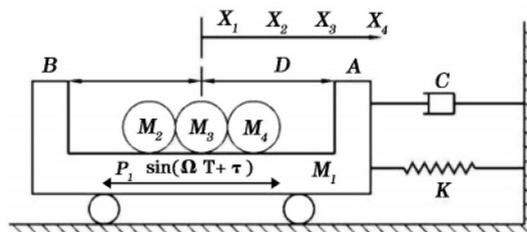


图1 一类含间隙动力振动系统的力学模型

假设力学模型中的阻尼是Rayleigh型比例阻尼,在无碰撞情况下,振子 M_1 与小球 M_2 、 M_3 、 M_4 的无量纲运动微分方程为:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\xi \dot{x}_1 + x_1 + x_1 = \sin(\omega t + \tau) \\ \ddot{x}_2 = 0 \\ \ddot{x}_3 = 0 \\ \ddot{x}_4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

这里，“·”表示对无量纲时间 t 求导数，无量纲量为：

$$\begin{aligned} \mu_{m1} &= \frac{M_1}{M_2}, \mu_{m2} = \frac{M_1}{M_4}, \mu_{m3} = \frac{M_2}{M_3}, \mu_{m4} = \frac{M_3}{M_4}, t = T \\ \sqrt{\frac{K}{M_1}}, x_i &= \frac{X_i K}{P_i}, \\ \xi &= \frac{C}{2\sqrt{KM_1}}, \delta = \frac{DK}{P_i}, \omega = \Omega \sqrt{\frac{M_i}{K}} \end{aligned} \quad (2)$$

根据碰撞动量守恒定律及碰撞恢复系数，写出系统无量纲冲击方程。

当小球 M_4 与振子 M_1 的相对位移 $x_4(t) - x_1(t) = \delta$ 时，小球 M_4 与振子挡板发生相互碰撞：

$$\mu_{m2} \dot{x}_{1+} + \dot{x}_{4+} = \mu_{m2} \dot{x}_{1-} + \dot{x}_{4-} \dot{x}_{4+} - \dot{x}_{1+} = R_1(\dot{x}_{1-} - \dot{x}_{4-}) \quad (3)$$

当小球 M_2 与振子 M_1 的相对位移 $x_1(t) - x_2(t) = \delta$ 时，小球 M_2 与振子挡板发生相互碰撞：

$$\mu_{m1} \dot{x}_{1+} + \dot{x}_{2+} = \mu_{m1} \dot{x}_{1-} + \dot{x}_{2-} \dot{x}_{2+} - \dot{x}_{1+} = R_2(\dot{x}_{1-} - \dot{x}_{2-}) \quad (4)$$

当小球 M_2 与小球 M_3 的相对位移 $x_3(t) - x_2(t) = 0$ 时，小球 M_2 与小球 M_3 发生相互碰撞：

$$\mu_{m3} \dot{x}_{2+} + \dot{x}_{3+} = \mu_{m3} \dot{x}_{2-} + \dot{x}_{3-} \dot{x}_{3+} - \dot{x}_{2+} = R_3(\dot{x}_{2-} - \dot{x}_{3-}) \quad (5)$$

当小球 M_4 与小球 M_3 的相对位移 $x_4(t) - x_3(t) = 0$ 时，小球 M_4 与小球 M_3 发生相互碰撞：

$$\mu_{m4} \dot{x}_{3+} + \dot{x}_{4+} = \mu_{m4} \dot{x}_{3-} + \dot{x}_{4-} \dot{x}_{4+} - \dot{x}_{3+} = R_4(\dot{x}_{3-} - \dot{x}_{4-}) \quad (6)$$

式(3)到(6)中， \dot{x}_{i-} 和 \dot{x}_{i+} ($i=1, 2, 3, 4$) 分别表示振子与小球，小球和小球碰撞前后的瞬时速度。

2 系统的混沌行为

在图1所示的含间隙振动系统的力学模型中，选取系统参数为： $\mu_{m1}=8.0$,

$\mu_{m_2}=8.0$, $\mu_{m_3}=1.0$, $\mu_{m_4}=1.0$, $R_1=0.8$, $R_2=0.8$, $R_3=0.8$, $R_4=0.8$, $\zeta=0.04$ 和 $\delta=0.1$ 。选取激振频率 ω 为系统分岔参数, 选取庞加莱截面 σ , 图 2 是该参数下含间隙多自由度振动系统的全局分岔图。在图 2 中可以看出, 系统经单周期运动后发生了 Neimark-Sacker 分岔, 随着激振频率 ω 的进一步减小, 系统发生了倍化分岔序列。文中用 $n-p-q$ 表示系统的周期运动, n 表示力周期数, p 和 q 分别表示振子与右侧和左侧小球 (a) (b) 的碰撞次数。数值仿真结果表明: 当 $\omega=(4.57, 5]$ 时, 图 1 所示的含间隙振动系统具有稳定的非对称周期 1-2-1 运动; 当系统激振频率 ω 递减穿越 $\omega=4.57$ 时, 系统失稳发生 Neimark-Sacker 分岔; 随着激振频率 ω 的进一步减小, 系统最终通过锁相通向混沌。图 3 给出了系统 $\omega=4.3$ 达到混沌状态时的相图和时间响应图。

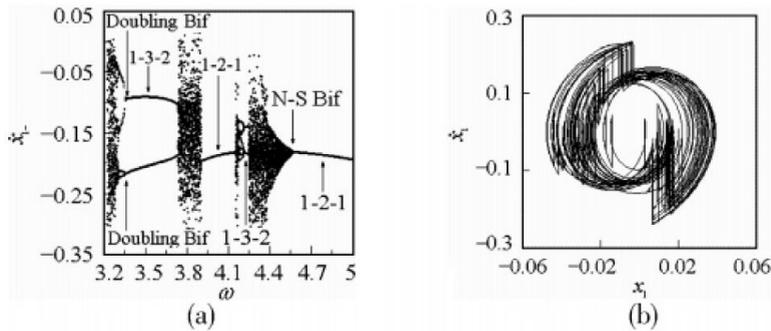


图 2 系统全局分岔图

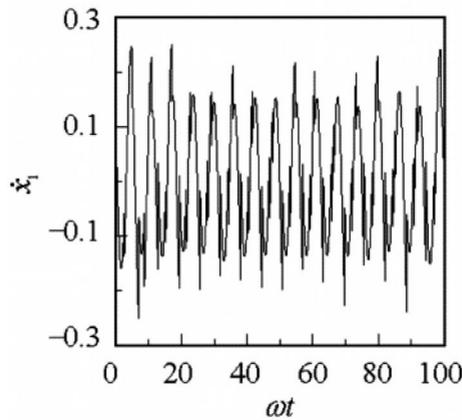


图 3 混沌状态的相图和时间响应图 ($\omega=4.3$)

3 用延迟反馈方法控制含间隙碰撞振动系统的混沌行为

延迟反馈可以用下面的形式表示：

$$X(n+1) = F(X(n)) + G(X(n-p) - X(n)) \quad (7)$$

其中， $X \in R_m, G = \text{Diag}[g_1, g_2, \dots, g_i, \dots, g_m], g_1 = g_2 = \dots = g_i (i \leq m)$ 是反馈因子。

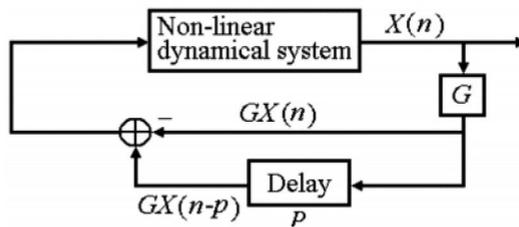


图4 延迟反馈原理图

图4是延迟反馈控制的原理图。当 $G=0$ ，原来的系统存在混沌行为。 X 和 $X(n-p)$ 分别是 n 时刻和 $n-p$ 时刻所对应的值。某些情况下可以将不稳定周期运动选作延迟时间 p ，如若反馈矩阵 G 选择合适，系统将会被控制到期望的周期轨道。

设置延迟时间为 $p=2$ ，无量纲参数为： $\mu_{m1}=8.0, \mu_{m2}=8.0, \mu_{m3}=1.0, \mu_{m4}=1.0, R_1=0.8, R_2=0.8, R_3=0.8, R_4=0.8, \zeta=0.04$ 和 $\delta=0.1, G=\text{Diag}[g_1=g_2=g_3=g_4=g_5=g_6=g_7=g_8=0.1$ 。为了清晰的反映控制过程，在 $n=2000$ 时施加控制，图3中的混沌吸引子被有效的控制到稳定点 $X_0^* = (x_1^*, \dot{x}_{1+}^*, x_2^*, \dot{x}_2^*, x_3^*, \dot{x}_3^*, x_4^*, \dot{x}_{4+}^*, \tau_0^*)^T = (0.00848892, 0.00558503, 0.10848910, -0.40590278, 0.10848910, -0.40590278, -0.03940683, 0.01781624, 5.09306560)^T$ 。通过数值仿真，控制之后的时间历程图如图5所示，其中(a)是关于相位角的时间历程图，(b)是对控制过程的放大图，(c)是小车位移受控后的时间历程图。当时，控制之后系统存在1-2-1运动，图6显示了运动的相图和时间历程图，由此显示延迟反馈方法能有效的将该系统的混沌行为控制到周期轨道。

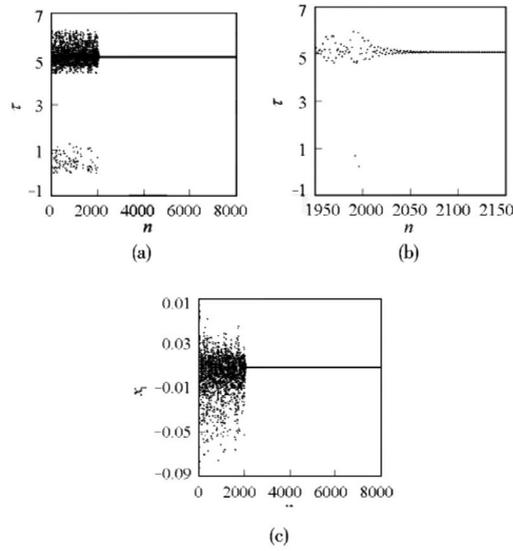


图5 施加控制后的时间历程图

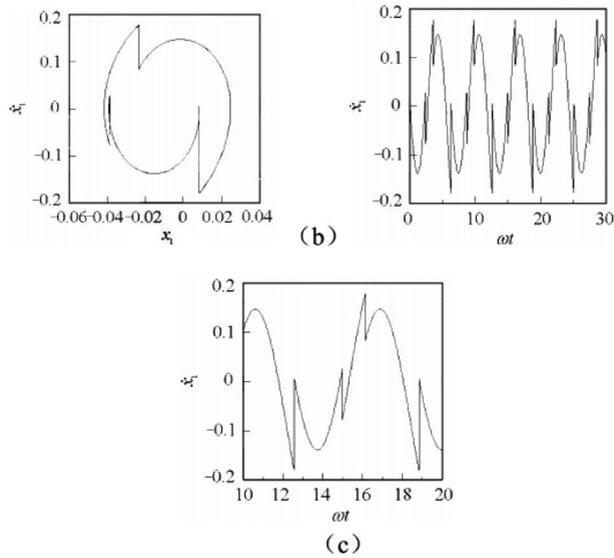


图6 1-2-1运动的相图时间历程图

4 结束语

根据一类多自由度碰撞振动系统的力学模型和无量纲微分方程，数值仿真

方法揭示了在适当的系统参数条件下,该系统存在丰富的动力学行为。随着参数的变化,系统由稳定周期碰撞 1-2-1 运动,发生 Neimark-Sacker 分岔,概周期碰撞振动通过锁相最终转迁为混沌磕碰振动。通过延迟反馈方法对系统进行控制,相图和时间历程图均显示该方法能将系统的混沌行为有效的控制到周期轨道。为该类模型参数优化及混沌行为的抑制提供了一定的理论依据,为该类系统的进一步动力学行为研究奠定了基础。

参考文献

- [1] Nordmarik A B. Non-periodic motion caused by grazing incidence in an import oscillator [J] . Journal of Sound and Vibration, 1991, 145 (2) : 279-297.
- [2] Luo GW, Xie JH. Codimension two bifurcation of periodic vibro-impact and chaos of a dual component system [J] . Phys Lett A 2003; 313 (4) : 267-73.
- [3] 马莉,吕晓石,李红萍. 一类多自由度含间隙动力系统的分岔与混沌 [J] . 兰州交通大学学报, 2009, 28 (6) : 134-137.
- [4] Paulo C. Rech, Naimark-Sacker bifurcations in a delay quartic map [J] . Chaos, Solitons and Fractals 2008, (37) : 387-392.