

## Research on the upper bound of delay based on the form of moment generating function

Duan Pengfei

Xi'an University of Science and Technology, Xi'an

**Abstract:** In order to analyze the delay performance of self-similar traffic, this paper newly expresses the arrival envelope and effective service curve using the theorem of the Moment Generating Function(MGF) and effective bandwidth, and a novel probabilistic concept with MGF is proposed. Based on the corresponding theory, the end-to-end statistical time delay bounds for self-similar traffic is modeled. Numerical analysis results show that the model largely improves statistical multiplexing, and performance evaluation on the Fractional Brownian Motion(FBM) business has better adaptability.

**Key words:** self-similar traffic; statistical network calculus; Moment Generating Function(MGF); Fractional Brownian Motion(FBM); effective bandwidth; statistical time delay bounds

Received: 2020-02-28; Accepted: 2020-03-14; Published: 2020-03-16

# 基于矩母函数形式的时延上界研究

## ——以矩母函数和有效带宽理论为视角

段鹏飞

西安科技大学，西安

邮箱: pfduan.303@hotmail.com

**摘要:** 为分析网络中自相似业务的时延性能,运用矩母函数和有效带宽等理论,重新表征网络演算中到达包络和有效服务曲线,提出基于矩母函数形式的时延上界,利用相关理论建立并推导适应于自相似业务的端到端统计时延上界模型。数值分析结果表明,该模型能提高统计复用,对分型布朗运动业务性能评价具有较好的适应性。

**关键词:** 自相似业务; 统计网络演算; 矩母函数; 分型布朗运动; 有效带宽; 统计时延上界

收稿日期: 2020-02-28; 录用日期: 2020-03-14; 发表日期: 2020-03-16

---

Copyright © 2019 by author(s) and SciScan Publishing Limited

This article is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



# 1 概述

随着通信技术的飞速发展，新兴多媒体业务不仅要考虑单一的数据传输，更要考虑服务质量（Quality of Service, QoS）。然而，大量研究表明，新型多媒体业务流量具有自相似性 [1]，即在很长的时间尺度上都存在流量突发。因此，如果忽略网络流量的自相似性，将会高估系统的性能，从而造成网络资源浪费。近几年来，统计网络演算理论 [2] 成为分析网络实时性能的热点，主要用来求解网络性能统计边界。文献 [3] 基于网络演算对服务策略中的相关问题进行分析，并推导出自相似网络的系统性能边界模型；文献 [4] 指出，对于单一服务的时延可利用逐加法求解，但该方法使得端到端性能边界太松且随着节点个数而快速衰减；文献 [5] 为概率型时延边界提供了相应计算公式。然而，由于含有直接卷积运算，因此上述方法需要大量复杂的数学运算，此外还忽略了统计复用部分。针对以上问题，文献 [6] 对漏桶源  $(\rho, \sigma)$  通过矩母函数（Moment Generating Function, MGF）和切尔诺夫界得到网络性能边界。

本文在分析上述文献的基础上，为了研究自相似业务的相关性质，运用自相似数学模型中具有代表性的分形布朗运动（Fractional Brownian Motion, FBM）流量模型进行研究，构造相应的网络时延性能上界的数学模型，并进行模拟仿真。

# 2 相关理论知识

下面介绍文中需要用到的技术基础，详细描述请参考文献 [2] [3] [4] [5] [6] [7]。

定义 1（分形布朗运动）如果到达流量  $A(t)$  满足：

$$A(t) = \lambda t + \sigma B(t) \tag{1}$$

则称自相似通信量  $A(t)$  为分形布朗运动，其中， $\lambda$  为流量平均到达速率； $B(t)$  是标准分形布朗运动； $\sigma$  为标准偏差。当  $N$  个独立且具有相同  $H$  参数的 FBM 通信量复用，聚合流满足  $\lambda_{con} = \sum_{i=1}^m \lambda_i$ ， $\sigma_{con}^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2$ 。

定义 2（统计服务曲线）若通信流的输入函数  $A(t)$  和输出函数  $D(t)$  满足以下关系：

$$P\{D \geq A \otimes \zeta(t)\} \geq 1 - \varepsilon, \forall \varepsilon \in [0, 1] \quad (2)$$

则称该系统为通信流提供了统计服务曲线 $\zeta(t)$ 。

对于经过  $N$  个节点的串联网路，有效服务曲线分别为 $\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots, \zeta_N(t)$ ，则系统提供的端到端有效服务曲线为：

$$\zeta_{E2E} = \zeta_1 \otimes \zeta_2 \otimes \dots \otimes \zeta_N \quad (3)$$

定义3（统计时延上界）在统计概率的前提下，通信流  $A(t)$  在端到端串联服务节点系统中的时延  $W^{E2E}(t)$  不小于  $d = \inf\{d \geq 0: A(t) \leq \zeta(t+d), \forall t \geq 0\}$  的概率为  $\varepsilon$ ，即满足：

$$P[W^{E2E}(t) \leq d] \leq \varepsilon \quad (4)$$

定义4（有效带宽）有效带宽 [6] 是网络链路中未被使用的固有带宽，通常是网络状况的一个量度。对于通信流  $A(t)$  来说，其有效带宽可定义为：

$$E(s, t) = \sup_{\tau > 0} \left\{ \frac{1}{s\tau} \log E \left[ e^{s(A(t+\tau) - A(t))} \right] \right\} \quad (5)$$

其中， $s$  为空间参数； $\tau$  为时间参数。有效带宽理论能够以统一的形式描述突发性业务流量的性能，通过建立有效包络和有效带宽之间的联系来表示相应的业务流量模型。定义5（矩母函数）矩母函数 [7] 可以完全刻画随机变量  $X$  的分布特征，如果一个随机变量  $X$  的函数 $e^{\theta x}$ 的期望值存在，则称 $e^{\theta x}$ 的期望值为  $X$  的矩母函数，记作 $M_X(\theta)$ ，即对任意  $\theta$  定义为：

$$M_X(\theta) = E[e^{\theta X}] \quad (6)$$

其中， $E$  为期望，且 $\overline{M}_X(\theta) = M_X(-\theta) = E[e^{-\theta X}]$ 。

利用矩母函数将统计网络演算中原先的最小加卷积和反卷积转变为传统代数中相应的 $\otimes$ 和 $\oslash$ 运算，即：

$$\begin{aligned} (X * Y)(t) &= \sum_{\tau=0}^t X(\tau)Y(t-\tau) \\ (X \circ Y)(\tau, t) &= \sum_{s=0}^{\tau} X(s+t)Y(s) \end{aligned} \quad (7)$$

相应的矩母函数形式上界分别为：

$$\begin{aligned} M_{X \otimes Y}(t) &\leq [M_X(-\theta) * M_Y(-\theta)](t) \\ M_{X \oslash Y}(t) &\leq [M_X(\theta) \circ M_Y(-\theta)](t) \end{aligned} \quad (8)$$

### 3 统计时延边界的矩母函数模型

本节利用切尔诺夫边界重新得到统计时延边界的矩母函数模型。

通过定义 4 可知，在时刻  $t$ ，输入函数  $A(t)$  和统计服

务曲线  $\zeta(s, t)$  组成的时延为  $d = \inf\{d \geq 0: A(t) \leq \zeta(t+d)\}$ ，结合切尔诺夫边界定义

$\Pr\{Y \geq \delta\} \leq E\{e^{\lambda(Y-\delta)}\}$  和式 (7)、式 (8) 容易得到统计时延为：

$$P\{W^{\text{EZE}}(t) < d\} \leq P\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} [A(s) - \zeta(s+d)] > 0\right\} \leq E[e^{\theta \sup_{0 \leq s \leq t} [A(s) - \zeta(s+d)]]] \leq [M_{\zeta}(-\theta) \circ M_A(\theta)](t) \quad (9)$$

在端到端串连网络中，结合式 (3)、式 (7) 和式 (8)，可得端到端网络有效服务曲线的矩母函数形式：

$$M_{\zeta(t)}(-\theta) \leq M_{\zeta_1(t)}(-\theta) * M_{\zeta_2(t)}(-\theta) * \dots * M_{\zeta_N(t)}(-\theta)$$

因此，串型网络系统端到端统计时延满足：

$$P\{W^{\text{EZE}}(t) < d\} \leq \left[ (M_{\zeta_1(t)}(-\theta) * M_{\zeta_2(t)}(-\theta) * \dots * M_{\zeta_N(t)}(-\theta)) \circ M_A(\theta) \right](t) \quad (10)$$

### 4 分形布朗运动的矩母函数形式

自相似特性是一个对网络工程至关重要的特性，如果忽略网络流量的自相似特性，将会造成不准确的网络资源分配，结合上述相关理论和文献 [6]，本文构建了 FBM 业务统计网络演算的矩母函数相关形式，该形式不仅继承了利用统计网络演算来计算网络性能的统计边界问题，而且符合 FBM 在网络中自相似特性的真实性 [8] [9] [10]。

FBM 的到达过程是一个具有稳定增量的自相似过程，满足  $A(t) = \lambda t + \sigma B(t)$ ，根据定义 4，FBM 达到过程的矩母函数形式为：

$$M_{A_{\text{com}}}(\theta, t) = E[e^{\theta A_{\text{com}}(t)}] = \exp\left\{\sum_{i=1}^m \lambda_i \theta t + \frac{\theta^2 \sum_{i=1}^m \sigma_i^2}{2} t^{2H}\right\} \quad (11)$$

假设系统的恒定服务速率为  $C$ ，满足  $S(t) = Ct$ ，根据定义 4，在任何积压时隙  $t$  内可得：

$$M_S(-\theta, t) = E[e^{-\theta S(t)}] = \exp\{-C\theta t\} \quad (12)$$

### 5 FBM 端到端统计时延的矩母函数模型

本节将基于上节构造的 FBM 矩母函数形式构造出相应的端到端统计时延模

型，这样可大大简化端到端的网络性能分析，并考虑聚合业务流特性，从而获得网络最大统计增益，有效地提高资源利用率。

为求网络端到端统计时延边界，将式(11)和式(12)代入式(10)中，并结合式(7)、式(8)，再经过一系列化简和计算可得到端到端时延的矩母函数形式：

$$P\{W^{E2E}(t) < d\} \leq \exp\left\{\sum_{i=1}^m \lambda_i \theta d + \frac{\theta^2 \sum_{i=1}^m \sigma_i^2}{2} d^2\right\} \cdot \frac{\exp\{(n+1)(C - \sum_{i=1}^m \lambda_i)^2\}}{\exp\{(C - \lambda)^2\}} \cdot \frac{\exp\left\{\frac{1}{6}(n+1)\theta^2 \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 (6C - 6\sum_{i=1}^m \lambda_i + 2\theta^2 \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 n + \theta^2 \sum_{i=1}^m \sigma_i^2)\right\}}{\exp\{(C - \lambda)^2\}} \quad (13)$$

结合定义4，令 $P[W(t) \leq d] = \varepsilon$ 的统计违背概率，最终可得到自相似业务端到端统计时延上界：

$$d \geq \frac{\theta d^{2H} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 + 2\theta \sum_{i=1}^m \sigma_i^2}{2 \sum_{i=1}^m \lambda_i} + \frac{\xi - (C - \sum_{i=1}^m \lambda_i)^2 - \ln \varepsilon}{\sum_{i=1}^m \lambda_i \theta} \quad (14)$$

其中：

$$\xi = \frac{1}{6}(n+1)(6(C - \sum_{i=1}^m \lambda_i)^2 + \theta^2 \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 (6C - 6\sum_{i=1}^m \lambda_i + 2\theta^2 \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 n + \theta^2 \sum_{i=1}^m \sigma_i^2))$$

## 6 数值结果和分析

本节通过使用数学仿真工具 Matlab 对上一节的网络端到端统计时延上界进行仿真验证，以验证其有效性。在仿真实验中，设置以下参数：节点服务能力  $C=100$  Mb/s，平均到达率  $\lambda=0.2$  Mb/s，标准差  $\sigma=7.25$ ，令以表征每个节点中链路的负载因子， $H$  参数代表自相似业务流的突发程度。

图1给出了 FBM 业务流经过系统后的端到端统计时延上界  $d$  与自相似参数  $H$  和网络节点个数  $N$  的关系。由图可以看出，上界  $d$  随个数  $N$  呈指数增长， $H$  越大，相应的  $d$  越大，且这种增大的趋势变得越来越陡峭。比如，同取  $N=10$ ，当  $H$  由 0.8 变成 0.7 时，相应  $d$  从 19 ms 增加到 33 ms，而当  $H$  由 0.7 变成 0.6 时，相应  $d$  从 33 ms 增加到 63 ms， $d$  的增加率从 73% 升到 91%，因此  $H$  越大，所需有效带宽越小，最终使得  $d$  越小。

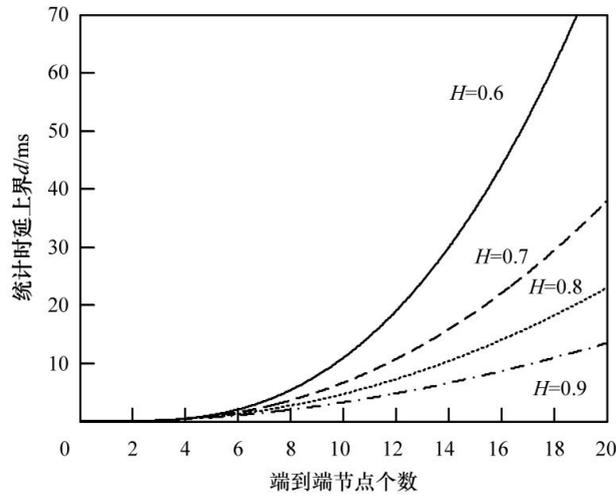


图1 端到端统计时延上界、自相似参数和节点数的关系

图2、图3给出了具有相同参数的FBM业务经过系统后端到端时延上界  $d$  和通信流个数  $m$  与服务节点个数  $N$  的关系。节点数  $N$  分别为1、5、10和20，图2、图3分别为文献[4]中逐加法与本文方法获得的端到端时延上界。结果表明，当随着节点个数  $N$  的增大，本文方法的统计复用增益越来越明显。图3中时延变化较图2更平缓 and 稳定，统计复用后的端到端时延明显小于个节点之和，有效提高带宽资源。

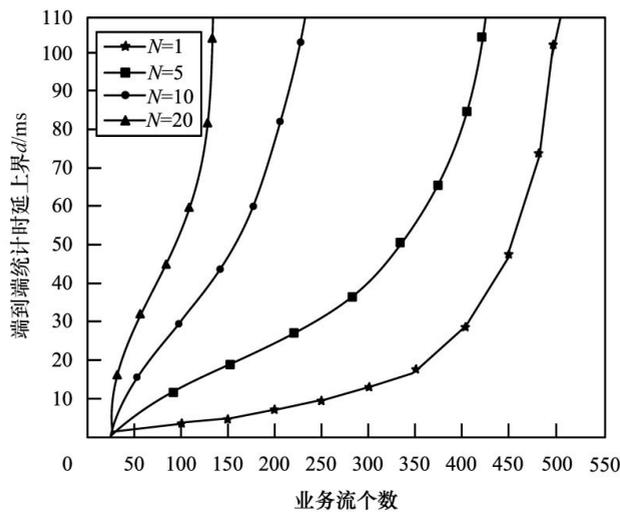


图2 逐加式网络演算的端到端时延上界

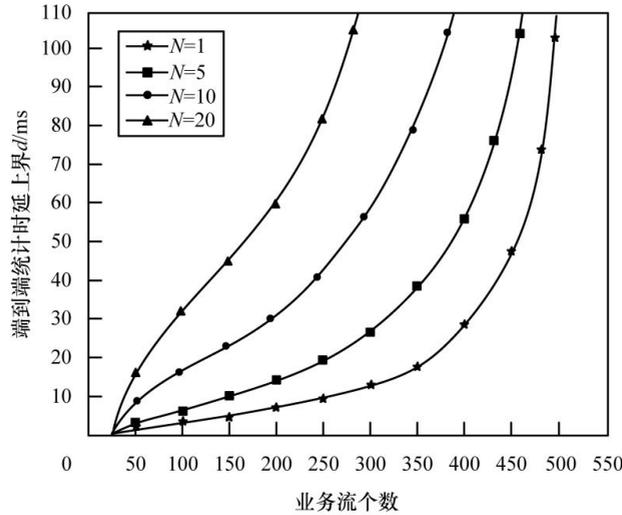


图3 矩母函数形式网络演算的端到端时延上界

图4、图5给出统计型时延上界  $d$  和违背概率  $\epsilon$  及相应参数关系。图4为节点个数  $N=6$  在  $H=0.7$  和  $0.9$  下时延分布，根据式(14)和文献[6]的研究结果进行计算，较大的违背概率、较低的突发性都意味着具有较小的统计时延上界，式(14)能提供明显紧得多的上界。图5表明通信流个数  $m$  对于时延上界的影响。图中曲线表明  $\epsilon$  随着  $m$  的增加而增加，随着  $d$  的增大而减小。通过矩母函数形式，能够更好地表现通信流的统计复用数目对时延上界的影响。

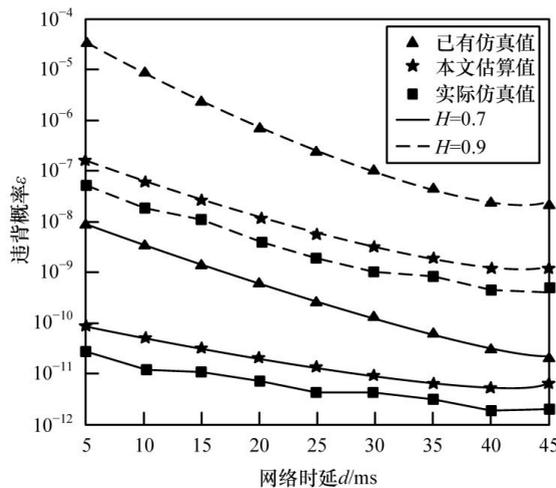


图4 端到端统计时延上界、自相似参数和违背概率的关系

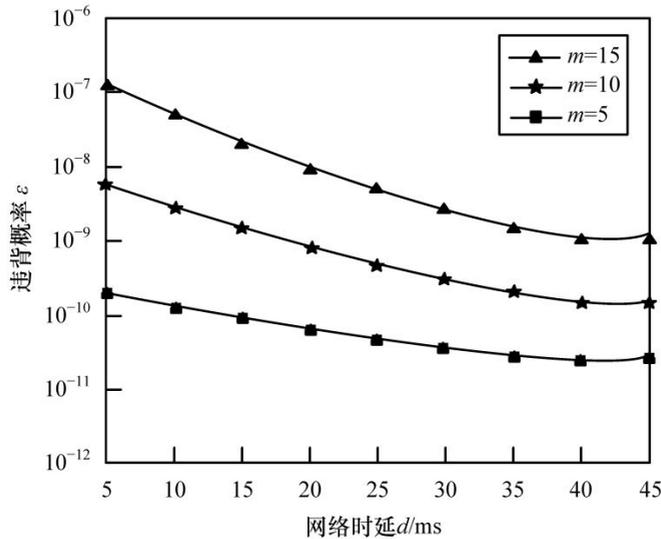


图 5 端到端统计时延上界、通信流个数和违背概率的关系

## 7 结束语

本文对统计网络演算的基本知识进行了简要阐述，将统计网络演算、自相似业务和矩母函数相结合，重新推导了基于矩母函数的网络端到端时延上界。该上界能直接避免复杂的卷积运算，较为准确地对时延上界进行了估算。数值结果表明，本文提出的上界对 FBM 业务性能评价具有更好的适应性，对目前实时 QoS 保证性能评价的相关研究具有一定的参考价值。

## 参考文献

[ 1 ] Parkand K. Self-similar Network Traffic and Performanee Evaluation [ M ] .  
New York, USA: John Wiley & Sons, Inc. , 2000.

[ 2 ] Jiang Yuming. A Basic Stochastic Network Calculus [ C ] //Proc. of ACM SIGCOMM' 06. [ S. 1. ] : ACM Press, 2006.

[ 3 ] 张连明, 陈志刚. 基于网络演算的 GPS 系统性能边界模型与分析 [ J ] .  
计算机工程, 2007, 33 ( 6 ) : 30-32.

[ 4 ] Yin Qinghe. Analysis of Generalized Stochastically Bounded Bursty Traffic for

- Communication Networks [ C ] //Proc. of IEEE LCN' 02. [ S. 1. ] : IEEE Press, 2002.
- [ 5 ] Chang Chengshang. Computable Exponential Bounds for Intree Networks with Routing [ C ] //Proc. of IEEE INFOCOM' 95. [ S. 1. ] : IEEE Press, 1995.
- [ 6 ] Fidler M. An End-to-end Probabilistic Network Calculus with Moment Generating Functions [ D ] . Ontario, Canada: University of Toronto, 2006.
- [ 7 ] 李春基. 矩母函数的探讨[ J ]. 牡丹江师范学院学报: 自然科学版, 1995, ( 1 ): 15-17.
- [ 8 ] 赵一, 张中荃. 一种基于聚合流的端到端统计时延界的新算法 [ J ] . 光通信研究, 2012, 38 ( 3 ) : 23-25.
- [ 9 ] Chang C S. Stability, Queue Length and Delay of Deterministic and Stochastic Queueing Networks [ J ] . IEEE Trans. on Automatic Control, 1994, 39 ( 5 ) : 913-931.
- [ 10 ] Jiang Yuming. A Note on Applying Stochastic Network Calculus [ C ] //Proc. of SIGCOMM' 10. Pisa, Italy: [ s. n. ] , 2010: 16-20.