理论数学前沿
2020 年 3 月第 2 卷第 1 期

Practical analysis of counter example teaching in functional analysis course

Deng Li

Nanjing Normal University, Nanjing

Abstract: The function of Counterexamples in the teaching of functional analysis is expounded. Through counter examples, students can understand concepts more deeply, master theorems and propositions systematically, and correct their mistakes in learning. The proper use of counter examples will help to improve the teaching quality of functional analysis and the cultivation of students' mathematical quality.

Key words: Functional analysis; Counterexample; Teaching; Function

Received: 2020-03-02; Accepted: 2020-03-17; Published: 2020-03-19

文章引用：邓黎．反例教学运用于泛函分析课程中的实践分析［J］．理论数学前沿，2020，2（1）：24–29.
https://doi.org/10.35534/tms.0201004

反例教学运用于泛函分析课程中的实践分析

邓 黎

南京师范大学，南京

邮箱：ld.eng009@163.com

摘　要： 阐述了反例在泛函分析教学中的作用。通过反例，可以使学生更深刻地理解概念，系统地掌握定理和命题，并纠正学生在学习中存在的错误。恰当地利用反例进行辅助教学，将有助于泛函分析教学质量的提高和学生数学素质的培养。

关键词： 泛函分析；反例；教学；作用

收稿日期：2020–03–02；录用日期：2020–03–17；发表日期：2020–03–19

Copyright © 2019 by author(s) and SciScan Publishing Limited

This article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

泛函分析是从变分法、积分方程、微分方程、逼近论和理论物理的研究中发展起来的一个数学分支，它综合地运用分析、代数和几何的方法，研究无限

维线性拓扑空间和这类空间之间各种映射的一般性质。泛函分析不仅在高校数学系的基础数学专业中开设，在许多学校的计算专业、应用数学专业中也均开设此课，甚至工科高年级本科生或研究生亦以此课为选修课，可见其重要作用。泛函分析课程综合了代数、分析、几何的观点和方法，所涉及的内容和技巧对数学专业各研究方向都极其重要。但由于该课程的高度抽象性，普遍存在难教难学的问题。

数学的发展过程是一个不断提出问题和解决问题的过程，其中问题的解决是由给出证明和构造反例来完成的。反例不仅有助于系统理论的产生，推动数学的发展，同时在大学数学的教学中也有着举足轻重的作用。通过反例教学，可以使学生更深刻地理解数学概念，系统地掌握定理和命题，并纠正学生在学习中存在的错误。本文将从三个方面来说明反例在泛函分析教学中的重要作用。

1　反例有助于学生对概念的理解

泛函分析中的概念本身是极其抽象的，在引入概念之后，必须在感性认识的基础上对概念做辩证的分析，用不同的方式进一步揭示概念的本质属性。列举或者构造反例往往能够消除学生一些容易出现的模糊认识，帮助学生严格区分那些相近易混的概念，把握概念的要素和本质，从而达到较好的教学效果。例如在泛函分析中有一个重要的概念是赋范线性空间定义［1］：

设 X 是线性空间，Φ 为标量域，若映射 p：$X \to R$ 满足

1）$p(x) \ge 0, \forall x \in X,$ 且 $p(x)=0$ 时，有 $x=0$，

2）$p(\alpha x)=|\alpha| p(x)$，$\forall x \in X, \alpha \in \Phi$，

3）$p(x+y) \le p(x)+p(y)$，$\forall x, y \in X$。

则称 p 是 X 上的范数，此时记$p(x)=\|x\|$，称$(X, \|\cdot\|)$是赋范线性空间。

要判定一个空间是不是赋范线性空间关键是考察定义在该空间上的映射是不是满足上述 3 个条件。在授课的过程中，教师一般会列举一些赋范线性空间的例子，学生在学习的过程中，根据定义也可以举出不是赋范线性空间的例子。但是同一线性空间是不是总是赋范线性空间呢？这与该空间上范数的定义有很大关系，此时教师可以举出反例。

例 1　设$C[a,b]$是闭区间$[a,b]$上的连续函数全体，对于任意的函数$x\in C[a,b]$，定义

$p(x)=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$ 和 $p_t(x)=|x(t)|$，$t\in[0,1]$，记$p(x)=\|x\|$，容易验证$(C[a,b],\|\cdot\|)$是赋范线性空间；而$pt(x)=0$并不能推出$x=0$，所以$(C[a,b],p_t)$不是赋范线性空间。事实上 p_t 为 X 上的半范数。

2　反例有利于学生对定理与命题的掌握

泛函分析中有很多重要的定理，如 HahnBanach 延拓定理、开映射闭图像定理、逆算子定理等。由于学生在学习的过程中受到知识的“迁移”和思维定式的影响，常常不注意定理的适用范围，或只是死记结论，或滥用命题的等效性，往往出现很多错误，教师在定理的教学中，若能针对某些定理给出一些相关命题，构造出一些反例，判断其真伪，这对学生正确理解和掌握定理十分有益。

定理 1［2］（逆算子定理）设 X、Y 是 Banach 空间，T：$X\to Y$ 是一一到上的有界线性算子，则逆算子T^{-1}也是有界线性算子。

学生在运用定理 1 时，往往会忽略定理的条件，盲目地套用定理，得出错误的结论。

例 2　设l_0^2是l^2中至多有有限多个坐标不为 0 的元素集合，以l^2中的范数为范数。令$T:l_0^2\to l_0^2$，$T(x_1,x_2,\cdots)=(x_1,\dfrac{x_2}{2},\cdots,\dfrac{x_n}{n},\cdots)$，证明$T^{-1}$也是有界的线性算子。易知 T 是到上的线性算子。由于 $Tx=0$ 可推出 $x=0$，以及$\|Tx\|_2\le\|x\|_2$，可知 T 是l_0^2到l_0^2上的一一有界线性算子，到这一步。学生往往会根据逆算子得出T^{-1}也是有界线性算子的结论。实际上，该结论是错误的。如T^{-1}: $l_0^2\to l_0^2$，$T^{-1}(x_1,x_2,\cdots)=(x_1,2x_2,\cdots,nx_n,\cdots)$并非有界。事实上，令$e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n},0,\cdots)$，易知$\|e_n\|_2=1$，但当$n\to\infty$时，$\|Te_n\|_2\to\infty$，$T^{-1}$将一个有界集映成了无界集。得出这个错误结论的主要原因是学生忽略了一个前提条件，即l_0^2并非 Banach 空间。事实上，令$x_n=(1,\dfrac{1}{2},\cdots,\dfrac{1}{n},0,\cdots)$，容易验证$\{x_n\}$为$l_0^2$中的 Cauchy 列，令$x_0=(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n+1},\cdots)$，则$x_n\to x_0$，但$x_0\notin l_0^2$，故$l_0^2$不完备。

由例 2 可知，在运用逆算子定理时，要充分验证定理的条件，同时也说明，

https://doi.org/10.35534/tms.0201004

定理 1 中 X、Y 完备的条件是必要的。所以通过反例可以加深学生对于定理的理解，帮助学生更好地掌握所学的内容。

3　反例有利于纠正学生在学习中存在的错误及偏差

教学的过程是一个知识积累的过程，同时也是不断发现错误改正错误的过程。反例在辨析错误中具有直观、明显、说服力强等突出特点。通过反例教学，不但可以发现学生在学习中存在的错误和漏洞，而且可以从反例中修补相关知识。

我们知道在有限维空间中，紧集和有界闭集是等价的，对于无限维空间，紧集一定是有界闭集，但是有界闭集不一定是紧集。学生往往将此结论混淆，如果教师能举出一个恰当的例子，那么学生就能很容易地搞清楚这两者之间的关系。

例 3　在 l^2 中，令 $e_n=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{n},0,\cdots)$，则 $\|e_n\|_2=1$，$n\geq 1$。集合 $A=\{e_n: n\geq 1\}$ 不是紧集。事实上，

$\|e_m-e_n\|=\sqrt{2}$，$\forall m\neq n$。

若取 $B_n=\mathrm{O}(e_n,\ \frac{1}{2})$，则 $\{B_n: n\geq 1\}$ 是 A 的一族开覆盖。但由于每个 B_n 只包含一个 e_n，其中没有任何有限子族覆盖 A。注意 A 还是 l^2 中的有界集，由于 A 中不存在 Cauchy 列，所以它还是闭集。

例 3 告诉我们，在无限维空间情况下，有界闭集不一定是紧集，其中每个无穷序列也不必有收敛的子序列。换句话说，在无穷维空间中，Bolzano–Weierstrass 定理并不成立。

4　结语

反例在泛函分析教学中有着极其重要的作用，在教学过程中，教师应该恰当地利用反例进行辅助教学，引导和帮助学生构造反例，培养训练学生构造反例的能力，这对于提高教学质量，培养学生的数学素养都是有益的[3]。

参考文献

[1] 刘培德. 泛函分析基础 [M] . 北京：科学出版社，2006.

[2] 夏道行，吴卓人，严绍宗，等. 实变函数论与泛函分析：下册 [M] . 北京：高等教育出版社，1985.

[3] 李春. 反例在泛函分析教学中的作用 [J] . 西南师范大学学报：自然科学版，2012，37（6）：230–232.

https://doi.org/10.35534/tms.0201004