现代物理进展
2020 年 5 月第 2 卷第 2 期

Using Bernoulli equation to solve the problem of fluid accelerating motion

Meng Ziyue

Henan University, Zhengzhou

Abstract: Under reference system of Linear motion with constant acceleration, if a ideal fluid makestable flowing, the Bernoulli's equation $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho(gy + ax) + p =$, which may be used for solving simply the accelerated motion of fluid, may be inferred by a chosen tube in any form.

Key words: physics; fluid dynamics; uniformly accelerated motion; Bernoulli's equation

Received: 2020-03-05; Accepted: 2020-03-20; Published: 2020-03-22

文章引用：孟子月．利用伯努利方程解决流体加速运动问题［J］．现代物理进展，2020，2（2）：52–57.
https://doi.org/10.35534/amp.0202008

利用伯努利方程解决流体加速运动问题

孟子月

河南大学，郑州

邮箱：zym.1990@sina.com.cn

摘　要： 在匀加速运动参照系下，当某一理想流体作稳定流动时，选取一个任意形状流管，可以推导出其伯努利方程式：$\frac{1}{2}\rho v^2+\rho(gy+ax)+p=$。利用该方程可以简便地处理流体加速运动问题。

关键词： 物理；流体力学；匀加速运动；伯努利方程

收稿日期：2020-03-05；录用日期：2020-03-20；发表日期：2020-03-22

https://doi.org/10.35534/amp.0202008

1 流体质点的力学分析

1.1 受力

在以加速度 a 运动的非惯性参照系下，当某一理想流体作稳定流动时，取图 1 所示细流管中 1–2 段流体，设截面 1， 2 处的面积各为 ΔA_1，ΔA_2；流速各为 v_1，v_2；压强各为 p_1，p_2；高度各为 y_1，y_2；经 dt 时间，1–2 区域内的流体到达 1′–2′ 区域。

在惯性参照系下，这个系统受到的内力有保守力和非保守力。保守力为重力。非保守力分为内摩擦力和内压力。内压力分为平行于流线面元上受到的内压力和垂直于流线面元上受到的内压力。系统受到的外力有周围流体对流管内流体的粘滞力、平行于流线的侧面上受到的压力和两端面上的压力。

与惯性参照系下流管内流体受力的情况相比，加速运动参照系下的流体增加了惯性力 $\vec{f_i}=-m\vec{a}$。设惯性力为 xo 方向，fi 与 v_1dt 之间的夹角为 $\pi-\theta$。惯性力的大小等于流管内流体的质量与加速度的乘积，即

$$f_i=\int_{x_1}^{x_2}df_i=\int_{x_1}^{x_2}\rho\Delta A_1 ds_i a=\frac{\rho\Delta A_1 a}{\cos\theta}\int_{x_1}^{x_2}ds_i\cos\theta=\frac{\rho\Delta A_1 a}{\cos\theta}\int_{x_1}^{x_2}dx_i=\frac{\rho\Delta A_1 a}{\cos\theta}(x_2-x_1)$$

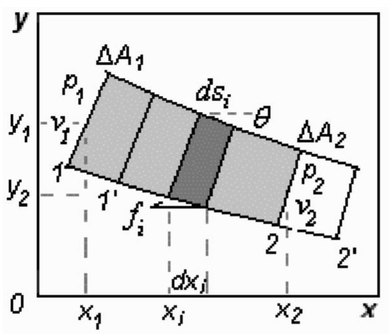

图 1 加速运动参照系下

1.2 功

保守力功的分析：重力所作的功转化为了相关势能。

非保守力功的分析：在理想流体中，内摩擦力可被忽略；平行于流线的面

元上受到的内压力与位移正交，根本不作功；垂直于流线的面元两侧流体相互作用的内压力，等大反向，位移相同，他们在这个运动过程中所作的功，正负相消，其和为零。所以，非保守内力所作的功为零。

外力功的分析：在理想流体中，粘滞力可被忽略；平行于流线的侧面上受到的压力与位移正交，在此过程中它不作功；外力功只有两端面上的压力和惯性力所作的功，即

$dw = dw_{f_1} + dw_{f_2} + dw_i = p_1 \Delta A_1 v_1 dt - p_2 \Delta A_2 v_2 dt - \rho a(x_2 - x_1)\Delta A_1 v_1 dt$，

将细流管体积流量：$\Delta Q_v = \Delta A_1 v_1 = \Delta A_2 v_2$ 代入，得：$dw = [p_1 - p_2 - \rho a(x_2 - x_1)]\Delta Q_v dt$。

1.3　机械能

dt 期间该段流体动能增量 dE_k 和重力势能增量 dE_p 分别等效为 1–1 ' 部位流体移到部 2–2 ' 位后的动能增量和重力势能增量，即

$dE_k = \frac{1}{2}\rho(\Delta A_2 v_2 dt)v_2^2 - \frac{1}{2}\rho(\Delta A_1 v_1 dt)v_1^2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)\Delta Q_v dt$；

$dE_p = \rho \Delta A_2 v_2 dt g y_2 - \rho \Delta A_1 v_1 dt g y_1 = \rho g(y_2 - y_1)\Delta Q dt$。

2　结果与讨论

由质点系的功能关系$dw = dE_k + dE_p$，得$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho(gy_1 + ax_1) + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho(gy_2 + ax_2) + p_2$，也可写为：$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho(gy + ax) + p =$常数（1）

选取某一垂直放置的规则流管，如图 2 所示，假设，流管内的理想流体作稳定流动，流管向上以 a 加速运动。这种情况相当于 $x = y = h$ 的特例，其伯努利方程式可以写为：$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho(g + a)h + p =$常数。（2）

https://doi.org/10.35534/amp.0202008

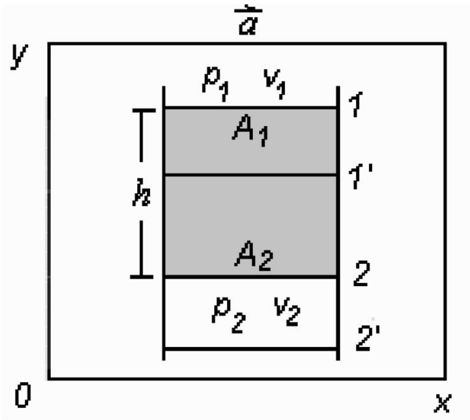

图 2　匀加速参照系下规则流管中理想流体运动示意图

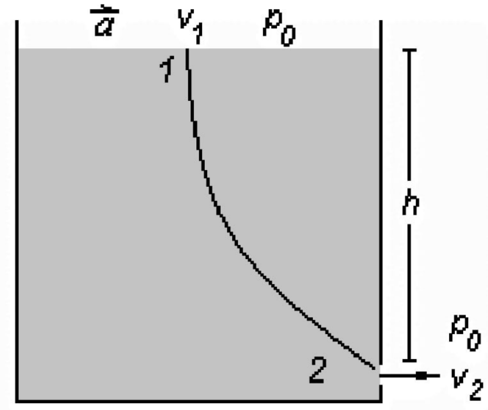

图 3　加速运动参照系下流体运动示意图

3　应用举例

如图 3 所示，容器水面高 h，底部有个小孔，p_0 为大气压，当它以 a 上升时，试求小孔流速。选取 1–2 流线，$v_2 >> v_1$，由（ 2 ）式列出伯努利方程式为：

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_0 = \rho(g+a)h + p_0,$$

解得：$v_2 = \sqrt{2(g+a)h}$。

在惯性系下求解这个问题很困难，也比较繁琐。然而，在匀加速直线运动参照系下求解则非常简便。

4 结论

推导出的匀加速直线运动参照系下的伯努利方程式，将惯性参照系下的伯努利方程拓宽到了加速运动的非惯性参照系。它是广义的伯努利方程式，为处理流体匀加速直线运动问题提供了一种简便的处理方法。

参考文献

[1] Shaughnessy E J. Fluid Mechanics [M]. New York: Oxford University Press, 2005: 490.

[2] van Horssen W T. On a method to solve Bernoulli ' s equation [J]. Nieuw Arch. Wisk, 1995, 13 (4): 127-129.

[3] Sirendaoreji J S. Applying the Bernoulli equation to solve a Klein-Gordon-type equation [J]. Math. Sci. , 2002, 27 (2): 102-107.

[4] 叶敬棠. 流体力学 [M]. 上海：复旦大学出版社，1989.

[5] 周光坰. 流体力学 [M]. 北京：高等教育出版社，2000.

[6] 田宝忠. 非惯性参照系下的伯努利方程的推导 [J]. 大庆石油学院学报，2007 (1).

https://doi.org/10.35534/amp.0202008