应用数学资讯
2020 年 5 月第 2 卷第 2 期

Spatial properties of solutions of higher order linear differential equations on unit circle

Lin Hui

Beijing Forestry University, Beijing

Abstract: The paper is devoted to the higher linear differential equation $f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_1(z)f'+A_0(z)f=0$. When coefficient $A_j(z)$，$j=0, 1, \cdots K-1$ satisfies certain conditions, all solutions will belong to $\mathrm{Bers}_{\log}^{p,q,m}$ space.

Key words: complex linear differential equation; function space

Received: 2020-03-29; Accepted: 2020-04-13; Published: 2020-04-15

单位圆上高阶线性微分方程解的空间属性

林 惠

北京林业大学，北京

邮箱：huilin88@sina.com.cn

文章引用：林惠．单位圆上高阶线性微分方程解的空间属性［J］．应用数学资讯，2020，2（2）：50–53.
https://doi.org/10.35534/ami.0202008

摘　要：考虑单位圆上的高阶线性微分方程 $f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_1(z)f'+A_o(z)f=0$，当系数 $A_j(z)$，$j=0,1,\cdots,k-1$ 满足一定条件时，此方程所有解 $f\in \mathrm{Bers}_{\log}^{p,q,m}$ 空间。

关键词：高阶线性微分方程；数空间；属性

收稿日期：2020-03-29；录用日期：2020-04-13；发表日期：2020-04-15

1　引言和主要结果

微分方程和函数空间理论已有很多作者研究，也有很多人将两者结合起来研究它们的属性，取得了一系列有意义的结果。Chr. Pommerenke 在文献 [1] 中将微分方程理论和函数空间理论相结合研究二阶微分方程解的空间属性，取得了很多结果。近年来 J. Heittokangas， R. Korhonen 等人进一步讨论了微分方程解的空间属性，也获得了很多好的结论，同时也将某些结果推广到高阶线性微分方程，得到一些经典的结论。在前人的基础上，本文主要讨论高阶线性微分方程解的空间属性。

定义设 D=｛z：|z|＜1｝是复平面 C 中的单位圆，单位圆 D 内的全纯函数全体记为 $H(D)$，设 $0\leqslant p<\infty$，$-\infty<q, m<\infty$，如果对任意的解析函数 $f(z)\in H(D)$，有 $\sup\limits_{z\in D}(1-|z|^2)^p\log^q\dfrac{1}{1-|z|^2}\left(\log\log\dfrac{1}{1-|z|^2}\right)^m|f(z)|<\infty$，则称 $f(z)$ 为一个 $\mathrm{Bers}_{\log}^{p,q,m}$ 函数，全体 $\mathrm{Bers}_{\log}^{p,q,m}$ 函数组成一个 $\mathrm{Bers}_{\log}^{p,q,m}$ 空间。

引理　假设 $f(z)$ 是方程 $f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_1(z)f'+A_o(z)f=0$ 在 $D_R=\{z\in C: |z|<R\}$ 中的一个解，设 $\theta\in[0,2\pi)$，$\varepsilon>0$，如果存在 $z_\theta=ve^{i\theta}\in D_R$，使得某个 $A_j(z_\theta)\neq 0$，$j=0,1,\cdots,k-1$，那么对任意的 $v<r<R$，有 $|f(re^{i\theta})|\leqslant C\exp\left(k\int_v^r \max_{j=0,1,\cdots,k-1}|A_j(te^{i\theta})|^{\frac{1}{k-j}}dt\right)$，其中 $C>0$ 是一个常数满足 $C\leqslant(1+\varepsilon)$

$$\max_{j=0,1,\cdots,k-1}\left(\frac{|f^{(j)}(z_\theta)|}{k^j\max_{n=0,\cdots,k-1}|A_n(z_\theta)|^{\frac{1}{k-n}}}\right)。$$

本文的主要结果是以下的定理。

定理　假设 $0\leqslant p,\lambda,\mu<\infty$，$-\infty<q,m<\infty$，如果存在一个常数 $\alpha=\alpha(p,q,m,k,\lambda,\mu)$ 使得方程 $f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_1(z)f'+A_o(z)f=0$ 的系数满足：

$$\lim_{|z|\to 1}\frac{M(r,A_j(z))^{\frac{1}{k-j}}}{\frac{1}{1-|z|}+\lambda\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\frac{1}{\log\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}+\mu\frac{1}{1-|z|}\frac{1}{\log\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}\frac{1}{\log\log\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}}=\alpha,\ |z|\leqslant r\leqslant 1,0<\alpha<\infty,j=0,\cdots,k-1$$

其中 $A_j(z)$，$j=0,1,\cdots k-1$ 都是单位圆 D 上不为零的解析函数，$M(r,A_j(re^{i\theta}))=\max_{0\leqslant\theta 2\pi}|A_j(re^{i\theta})|$，那么此方程的所有解 $f\in \mathrm{Bers}_{\log}^{p,q,m}$ 空间。

2　定理的证明

证明　设 f 是高阶线性微分方程的解，设 $\delta<r<1$，$\forall\varepsilon>0$，由引理可知存在一个常数 c_1 使得对任意的 $\theta\in[0,2\pi)$ 有 $|f(re^{i\theta})|\leqslant c_1\exp\left(k\int_0^r\sum_{j=0}^{k-1}|A_j(se^{i\theta})|^{\frac{1}{k-j}}ds\right)$。

由定理的条件可知

$$M(r,A_j(z))^{\frac{1}{k-j}}\leqslant(\alpha+\varepsilon)\left[\frac{1}{1-|z|}+\lambda\frac{1}{1-|z|}\frac{1}{\log\frac{1}{1-|z|}}+\mu\frac{1}{1-|z|}\frac{1}{\log\frac{1}{1-|z|}}\frac{1}{\log\log\frac{1}{1-|z|}}\right]$$

$$\leqslant(\alpha+\varepsilon)\left[\frac{1}{1-r}+\lambda\frac{1}{1-r}\frac{1}{\log\frac{1}{1-r}}+\mu\frac{1}{1-r}\frac{1}{\log\frac{1}{1-r}}\frac{1}{\log\log\frac{1}{1-r}}\right]$$

则可得

$$
\begin{aligned}
|f(re^{i\theta})| &\leqslant c_1\exp\left(k\int_0^\delta \sum_{j=0}^{k-1}|A_j(se^{i\theta})|^{\frac{1}{k-j}}\mathrm{d}s + k\int_\delta^r \sum_{j=0}^{k-1}|A_j(se^{i\theta})|^{\frac{1}{k-j}}\mathrm{d}s\right)\\
&\leqslant c_2\exp\left(k\int_\delta^r \sum_{j=0}^{k-1}|A_j(se^{i\theta})|^{\frac{1}{k-j}}\mathrm{d}s\right)\\
&\leqslant c_2\exp\left((\alpha+\varepsilon)k^2\int_\delta^r\left[\frac{1}{1-s}+\lambda\frac{1}{1-s}\frac{1}{\log\frac{1}{1-s}}+\mu\frac{1}{1-s}\frac{1}{\log\frac{1}{1-s}}\frac{1}{\log\log\frac{1}{1-s}}\right]\mathrm{d}s\right)\\
&\leqslant c_2\exp\left((\alpha+\varepsilon)k^2\left[\int_\delta^r\frac{1}{1-s}\mathrm{d}s+\lambda\int_\delta^r\frac{1}{1-s}\frac{1}{\log\frac{1}{1-s}}\mathrm{d}s+\mu\int_\delta^r\frac{1}{1-s}\frac{1}{\log\frac{1}{1-s}}\frac{1}{\log\log\frac{1}{1-s}}\mathrm{d}s\right]\right)\\
&\leqslant c_3\exp\left((\alpha+\varepsilon)k^2\log\frac{1}{1-r}\right)\exp\left(\lambda(\alpha+\varepsilon)k^2\left[\log\log\frac{1}{1-r}\right]\right)\exp\left(\mu(\alpha+\varepsilon)k^2\left[\log\log\log\frac{1}{1-r}\right]\right)\\
&\leqslant c_4\left(\frac{1}{1-r}\right)^{k^2\alpha}\left(\log\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda k^2\alpha}\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\mu k^2\alpha}
\end{aligned}
$$

令 $p=k^2\alpha$，$q=-\lambda k^2\alpha$，$m=-\mu k^2\alpha$，则得到 $f\in \mathrm{Bers}_{\log}^{p,q,m}$ 空间。

参考文献

[1] Chr Pommerenke. On the mean growth of the solutions of complex linear differential equations in the disc [J]. Complex Variables, 1982, (1): 23–38.

[2] Heittokangas J, Korhonen R, R attya J. Growth estimates for solutions of linear complex differential equations [J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss, 2004, 29: 233–246.

https://doi.org/10.35534/ami.0202008