理论数学前沿
2020 年 6 月第 2 卷第 2 期

Calculation of Family Joint Life Insurance

Zhao Jing

Northeast Normal University, Changchun

Abstract: Under the premise of the unified life actuarial symbol the paper studies the actuarial problems of joint family life insurance. Under the assumption of characterizing the force of interest by using the Wiener process and handling dependencies between individuals with conditional Archimedean Copula, the actuarial present value of joint family life insurance and the level annual premium was calculate.

Key words: Conditional Archimedean copula; Actuarial present value; Level annuity premium

Received: 2020-04-30; Accepted: 2020-05-15; Published: 2020-05-17

家庭联合寿险的计算

赵　静

东北师范大学，长春

邮箱：jzhao_1992@126.com

文章引用：赵静．家庭联合寿险的计算［J］．理论数学前沿，2020，2（2）：43-51.
https://doi.org/10.35534/tms.0202007

摘　要：在统一生命精算符号的前提下研究家庭联合寿险精算问题。在对利息力采用 Wiener 过程刻画，并用条件阿基米德 Copula 函数处理个体间相依性的假设前提下，计算家庭联合寿险的精算现值以及均衡年保费。

关键词：条件阿基米德 Copula；精算现值；均衡年保费

收稿日期：2020-04-30；录用日期：2020-05-15；发表日期：2020-05-17

Copyright © 2020 by author(s) and SciScan Publishing Limited

This article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

Copula 函数是一种连接函数，它将一个联合分布与该联合分布的各个边缘分布连接在一起。早在 1959 年，Sklar 就提出 Copula 理论，他指出任意的一个多元分布函数都能够分解为多个边缘分布和一个连接各个边缘分布的 Copula 函数。随后，Nelsen 又对 Copula 函数作了详细且系统的介绍，包括它的定义、构造、性质等问题，并对其在金融上的应用作出了阐述。此后，Copula 理论在金融领域中得到了广泛的应用。而我国对联合寿险方面所做的研究大多是在邹焱等提出的一种夫妻联合养老金精算模型的基础上进行改进和再加工的。但大部分联合寿险精算研究的前提是假设联合寿险内各个体间的关系是相互独立的。在解决联合寿险产品定价中个体相关性的问题时，国内外大多学者选定 Copula 函数这个工具。本文利用 Heekyung Youn [5] 等改进的生命函数符号，将单生命与二元生命精算符号的条件统一为 $\{X>x, Y>y\}$ 。再结合 Patton 构造的二元条件 Copula，对翁小艳的条件阿基米德 Copula 进行改进，得到在 $\{X>x, Y>y\}$ 条件下的条件 Copula 函数 $\hat{C}_{xy}(u,v)$ 及其生成元。再采用条件 Copula 函数处理个体关

系，对随机利率下的家庭联合寿险作出研究，得到其保费的精算现值和均衡年保费的计算方法。并给出了个体相关性所得的均衡年保费的实例应用。

1 预备知识

定义 1 一个定义域为 $I^2=[0,1]^2$ 的二元函数 C 满足：

①对任意 $(u,v)\in I^2$，都有 $0\leqslant C(u,v)\leqslant 1$；

②对任意的 $(u,v)\in I^2$，都有 $C(u,0)=C(0,v)=0$，$C(u,1)=u$，$C(1,v)=v$；

③对任意的 $u_1, u_2, v_1, v_2\in I$，并且 $u_1\leqslant u_2$，$v_1\leqslant v_2$，都有

$$C(u_2,v_2)-C(u_2,v_1)-C(u_1,v_2)+C(u_1,v_1)\geqslant 0 \tag{1}$$

则称这个二元函数 C 为二元 Copula 函数。其中 u，v 均服从 $[0,1]$ 均匀分布。

定理 1 （Sklar 定理）若随机变量 X，Y 的联合分布函数为 $H(x,y)$，其边缘分布函数分别为 $F(x)$ 和 $F(y)$，那么存在一个 Copula C，对任意的 $(x,y\in R^2)$，有

$$H(x,y)=C(F(x),G(y)) \tag{2}$$

若 $F(x)$，$G(y)$ 连续，则 C 唯一确定；反之，若 C 是 Copula，且 $F(x)$，$G(y)$ 是分布函数，则由（2）式确定的 $H(x,y)$ 是 $F(x)$，$G(y)$，两边缘函数的联合分布函数。

推论 1 令 $H(x,y)$ 为边缘分布 $F(x)$，$G(y)$ 的联合分布函数，$C(x,y)$ 为相应的 Copula，$F^{-1}(x)$，$G^{-1}(y)$ 为 $F(x)$，$G(y)$ 的伪逆函数，则对 $C(x,y)$ 定义域内任意的 (u,v)，均有：

$$C(u,v)=H(F^{-1}(u),G^{-1}(v)) \tag{3}$$

定义 2 若随机变量 X，Y 的联合分布函数为 $H(x,y)$，其边缘分布函数分别为 $F(x)$ 和 $G(y)$，X，Y 对应的 Copula 为 $C(u,v)$，若 $\hat{C}$：$I^2\to I$，且：

$$\hat{C}(u,v)=u+v-1+C(1-u,1-v) \tag{4}$$

则 $\hat{C}(u,v)$ 为 Copula，称为 X，Y 的生存 Copula。

定义 3 ϕ 为 $[0,1]\to[0,\infty]$ 的一元连续，严格单调的凸函数，满足 $\phi(1)=0$。存在逆函数 ϕ^{-1}：$[0,\infty]\to[0,1]$。令

https://doi.org/10.35534/tms.0202007

$$C(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u)+\phi(v)) \tag{5}$$

将具有（5）式的 Copula 称为阿基米德 Copula，其中 ϕ 称为阿基米德 Copula $C(u, v)$ 的生成元。

定义 4　令（x_1，y_1）和（x_2，y_2）为独立同分布的随机向量，定义

$$\tau \equiv P[(x_1-x_2)(y_1-y_2)>0]-(P[(x_1-x_2)(y_1-y_2)<0] \tag{6}$$

为 kendall 秩相关系数，记为 τ 。

定理 2　kendall 秩相关系数 τ 与 Copula 函数存在如下关系：

$$\tau = 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)\mathrm{d}C(u,v)-1 \tag{7}$$

2　符号介绍

2.1　传统的生命函数符号

（x）表示 x 岁的被保险人 X，T（x）表示（x）的未来生存时间。记 ${}_tq_x$ 为（x）死于 $x+t$ 岁前的概率，则 ${}_tq_x=P\{X\leqslant x+t\}$；${}_tp_x=1-{}_tq_x=P\{X>x+t\}$ 为（x）活过 $x+t$ 的概率。

（xy）表示（x）和（y）组成的联合生存状态，$T(xy)=\min\{T(x), T(y)\}$ 为其未来生存时间；$(\overline{xy})$表示（x）和（y）组成的最后生存者状态，$T(\overline{xy})=\max\{T(x), T(y)\}$ 为其未来生存时间。

记 ${}_tp_{xy}=P\{X>x+t$ 且 $Y>y+t\}$；${}_tp_{\overline{xy}}=P\{X>x+t$ 或 $Y>y+t\}$；${}_tq_{xy}=P\{X\leqslant x+t$ 且 $Y\leqslant y+t\}$；$q_{\overline{xy}}=P\{X\leqslant x+t$ 或 $Y\leqslant y+t\}$ 。

2.2　家庭联合寿险中改进的生命函数符号

在家庭联合寿险中，我们引进（$x\|y$）表示配偶为 y 岁的 x 岁被保险人 X，$T(x\|y)$ 表示（$x\|y$）的未来生存时间；同样，（$y\|x$）表示配偶为 x 岁的 y 岁被保险人 Y，表示（$y\|x$）的未来生存时间。

这样，${}_tp_{x\|y}=P\{X>x+t|X>x$ 且 $Y>y\}$为($x\|y$)活过 $x+t$ 的概率，${}_tq_{x\|y}=P\{X\leqslant x+t|X>x$ 且 $Y>y\}$ 为（$x\|y$）死于 $x+t$ 前的概率。

2.3 精算现值符号

$\overline{A}_x$表示（x）死亡时立即给付的寿险精算现值；$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$表示期初给付的 n 年定期生存年金；${}_{n|m-n}\ddot{a}_x$表示（x）延期 n 年的定期 $m-n$ 年的年金。

3 条件阿基米德 Copula

3.1 生存 Copula 函数

引理 1 令一对可交换的非负随机变量 X，Y 分别为（x）与（y）个体，设联合生存函数为$\overline{H}(x,y)=P\{X>x, Y>y\}$，则其边缘生存函数分别为$\overline{F}(x)$,$\overline{G}(y)$。并假定$\overline{F}(x)$,$\overline{G}(y)$为连续严格减函数，且$\overline{F}(0)=1$，$\overline{G}(0)=1$，则（$x$，$y$）的生存 Copula 为$\hat{C}(u,v)=\overline{H}\{\overline{F}^{-1}(u),\overline{G}^{-1}(v)\}$。

证明：$\overline{H}(x,y)=1-F(x)-G(y)+H(x,y)=\overline{F}(x)+\overline{G}(y)-1+C(F(x),G(y))=F(x)+G(y)-1+C(1-F(x),1-G(y))=\hat{C}(\overline{F}(x),\overline{G}(y))$，

再由推论 1 得：$\hat{C}(u,v)=\overline{H}\{\overline{F}^{-1}(u),\overline{G}^{-1}(v)\}$。

为了简单起见，我们考虑$\hat{C}(u,v)$是阿基米德 Copula 的情况。这是因为阿基米德 Copula 对边缘分布的类型并没有严格的限制，它可以为任意分布。设它的生成元为 $\phi(t)$，并满足$\phi(1)=0$，$\phi(0)=\infty$。所以$\hat{C}(u,v)=\phi^{-1}(\phi(u)+\phi(v)$；即：

$$\overline{H}(x,y)=\hat{C}(\overline{F}(x),\overline{G}(y))=\phi^{-1}(\phi(\overline{F}(x))+\phi(\overline{G}(y))) \tag{8}$$

3.2 条件生存 Copula 函数

命题 1 令 $\phi(\overline{F}(x))=\phi(x),\phi(\overline{G}(x))=\phi(y)$，且$\{X>x, Y>y\}$条件下的条件生存为 Copula$\hat{C}_{xy}(u,v)$，则对任意的 $t>0$，有

$${}_tp_{xy}=\frac{\phi^{-1}(\phi(x+t)+\phi(y+t))}{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y))},\ {}_tp_{x\|y}=\frac{\phi^{-1}(\phi(x+t)+\phi(y))}{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y))},\ {}_tp_{y\|x}=\frac{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y+t))}{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y))},$$

$${}_tp_{\overline{xy}}=\frac{\phi^{-1}(\phi(x+t)+\phi(y))+\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y+t))-\phi^{-1}(\phi(x+t)+\phi(y+t))}{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y))}。$$

证明：${}_tp_{xy}=\overline{H}_{xy}(x,y)=P\{X>x+t,Y>y+t\mid X>x,Y>y\}=\dfrac{\overline{H}(x+t,y+t)}{\overline{H}(x,y)}=\dfrac{\phi^{-1}(\phi(x+t)+\phi(y+t))}{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y))}$，

同理，${}_tp_{x\|y}=\overline{F}_{xy}(x)=P\{X>x+t\mid X>x,Y>y\}=\dfrac{\overline{H}(x+t,t)}{\overline{H}(x,y)}=\dfrac{\phi^{-1}(\phi(x+t)+\phi(y))}{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y))}$，

$$ {}_tp_{\overline{y\|x}}=\bar{G}_{xy}(y)=P\{Y>y+t\mid X>x,Y>y\}=\frac{\overline{H}(t,y+t)}{\overline{H}(x,y)}=\frac{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y+t))}{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y))}, $$

又因为：${}_tp_{\overline{xy}}+{}_tp_{xy}={}_tp_{x\|y}+{}_tp_{y\|x}$，则

$$ {}_tp_{\overline{xy}}={}_tp_{x\|y}+{}_tp_{y\|x}-{}_tp_{xy}= $$
$$ \frac{\phi^{-1}(\phi(x+t)+\phi(y))+\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y+t))-\phi^{-1}(\phi(x+t)+\phi(y+t))}{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y))}。 $$

定理 3　设联合生存状态（*xy*）的生存函数为 $\overline{H}(x,y)$，*X*，*Y* 服从［0，1］上的均匀分布。（*x*）的生存函数为$\bar{F}(x)$,(y)，（*y*）的生存函数为 $\bar{G}(y)$。令对应的生存Copula$\hat{C}(u,v)$为阿基米德 Copula，设其生成元为ϕ（*t*），则在｛*X*>*x*，*Y*>*y*｝条件下的条件Copula$\hat{C}_{xy}(u,v)$也是阿基米德 Copula，且生成元为：

$$ \phi_{xy}(s)=\phi\{s\cdot\phi^{-1}[\phi(x)+\phi(y)]\}-\phi(x)-\phi(y) \tag{9} $$

证明：令$\phi_{xy}^{-1}(s)=\dfrac{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y)+s)}{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y))}$,$\phi_t^{-1}(s)=\phi(s+t)-\phi(s)$，则

$$ \hat{C}_{xy}(u,v)=\frac{\phi^{-1}(\phi(x+t)+\phi(y+t))}{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y))}= $$
$$ \frac{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y)+[\phi(x+t)-\phi(x)]+[\phi(y+t)-\phi(y)])}{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y))}= $$
$$ \frac{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y)+\phi_t^{-1}(x)+\phi_t^{-1}(y))}{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y))}=\phi_{xy}^{-1}(\phi_t^{-1}(x)+\phi_t^{-1}(y)), $$
$$ \hat{C}_{xy}(u,1)=\bar{F}_{xy}(x)=\phi_{xy}^{-1}(\phi_t^{-1}(x)),\hat{C}_{xy}(1,v)=\bar{G}_{xy}(y)=\phi_{xy}^{-1}(\phi_t^{-1}(y)), $$

$$ \hat{C}_{xy}(u,v)=H_{xy}\{F_{xy}^{-1}(u),G_{xy}^{-1}(v)\}=\phi_{xy}^{-1}\{\phi_{xy}[F_{xy}^{-1}(u)+\phi_{xy}[G_{xy}^{-1}(v)= $$

$$ =\phi_{xy}^{-1}(\phi_{xy}(u)+\phi_{xy}(v)), $$

故$\hat{C}(u,v)$是阿基米德 Copula 下求其生成元ϕ_{xy}（*s*）。

$$ \phi_{xy}^{-1}(s)=\frac{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y)+s)}{\phi^{-1}(\phi(x)+\phi(y))},s=\phi\{\phi_{xy}^{-1}(s)\cdot\phi^{-1}[\phi(x)+\phi(y)]\}-\phi(x)-\phi(y), $$
$$ \phi_{xy}(s)=\phi\{s\cdot\phi^{-1}[\phi(x)+\phi(y)]\}-\phi(x)-\phi(y)。 $$

推论 2 若｛X>x，Y>y｝条件下的条件 Copula 为$\hat{C}_{xy}(u,v)$，则联合生存函数 ${}_tp_{xy}=\hat{C}_{xy}(x,y)$,${}_tp_{\overline{xy}}=\hat{C}_{xy}(x,1)+\hat{C}_{xy}(1,y)-\hat{C}_{xy}(x,y)$,

联合死亡函数${}_tq_{xy}=1-\hat{C}_{xy}(u,v)$,${}_tq_{\overline{xy}}=1-\hat{C}_{xy}(u,1)-\hat{C}_{xy}(1,v)+\hat{C}_{xy}(u,v)$。

4　家庭联合寿险的精算模型

4.1　承保对象及保险责任

承保对象：法定年龄（男 22 周岁，女 20 周岁）以上，身体健康，且年龄均不高于 35 周岁的合法夫妻，分别用（x），（y）表示。保险责任：

①寿险：夫妻双方任一人在保单生效后死亡，死亡时刻立即给付保险金 R_1；

②年金：规定每年年初支付。

设夫妻双方年龄分别为 x，y（$x \leqslant y$），记 m=60−y，n=60−x，则年金的给付可以划分为如下三种形式：

①在投保的第 m ~ n 年间，若$(\overline{xy})$存在，则每年给付 a_1R_2（a_1>1）；

②在 n 年后，若$(\overline{xy})$存在，则每年给付 R_2；

③在 n 年后，若（xy）存在，则每年给付 a_2R_2（a_2>1）。

4.2　纯保费的计算

该模型中，利息力累积函数采用 $y(t)=\delta t+\beta W(t)$。其中 δ 为常利息力，$\beta \geqslant 0$ 为常实数，$W(t)$ 为一个标准的 Wiener 过程。并且假设 $y(t)$ 与 $T(x)$，$T(y)$ 相互独立。并且采用推论 2 介绍的由条件 Copula 函数 $\hat{C}_{xy}(u,v)$ 构造的联合生命函数。

均衡保费为 h 年内，当（xy）存在时每年年初支付的。则第 k（$0 \leqslant k \leqslant h$）年年初的支付额为 1 个单位的精算现值为：

$$\ddot{a}_{xy:\overline{h}|} = \sum_{k=0}^{h-1} e^{-(\delta-(1/2)\beta^2)k}\, {}_k p_{xy} = \sum_{k=0}^{h-1} e^{-(\delta-(1/2)\beta^2)k} \cdot \hat{C}_{xy}(x,y)。$$

（1）寿险部分。先设本文的寿险死亡赔付额为 1 个单位，寿险部分保险责任可划分为以下两个方面：

①（xy）结束时，得到 1 个单位的赔付额，其精算现值用$\overline{A}_{xy}$表示；

②（$\overline{xy}$）结束时，得到 1 个单位的赔付额，其精算现值用$\overline{A}_{\overline{xy}}$表示，则：

$$\overline{A}_{xy} = E(e^{-y(T(xy))}) = \int_0^{+\infty} e^{-(\delta-(1/2)\beta^2)t}\, {}_t q_{xy}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-(\delta-(1/2)\beta^2)t} \cdot [1-\hat{C}_{xy}(x,y)]\mathrm{d}t,$$

https://doi.org/10.35534/tms.0202007

$\overline{A}_{\overline{xy}} = E(e^{-y(T(\overline{xy}))}) = \int_0^{+\infty} e^{-(\delta-(1/2)\beta^2)t} {}_tq_{\overline{xy}} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-(\delta-(1/2)\beta^2)t} \cdot [1 - \hat{C}_{xy}(x,1) - \hat{C}_{xy}(1,y) + \hat{C}_{xy}(x,y)]\mathrm{d}t$。

根据平衡准则，投保时趸缴净保费的精算现值应该和该部分的均衡年保费精算现值相等，从而可以得到平衡方程：

$$\overline{A}_{xy} = {}_hp_1 \cdot \ddot{a}_{xy:\overline{h}|},$$

该部分 1 个单位的均衡年保费为：${}_hp_1 = \dfrac{\overline{A}_{xy}}{\ddot{a}_{xy:\overline{h}|}}$，同理，${}_hp_2 = \dfrac{\overline{A}_{\overline{xy}}}{\ddot{a}_{xy:\overline{h}|}}$。

（2）年金部分。形式（1）相当于（$\overline{xy}$）延期 m 年的定期 $n-m$ 年的年金，其精算现值为：

${}_{m|n-m}\ddot{a}_{\overline{xy}} = \sum_{k=n}^{m-1} e^{-(\delta-(1/2)\beta^2)k} {}_kp_{\overline{xy}} = \sum_{k=n}^{m-1} e^{-(\delta-(1/2)\beta^2)k} \cdot [\hat{C}_{xy}(x,1) + \hat{C}_{xy}(1,y) - \hat{C}_{xy}(x,y)$，其 1 个单位的均衡年保费为：${}_hp_3 = \dfrac{{}_{m|n-m}\ddot{a}_{\overline{xy}}}{\ddot{a}_{xy:\overline{h}|}}$。

形式（2）相当于（$\overline{xy}$）延期 n 年的终身年金，其精算现值及其 1 个单位的均衡年保费为：

${}_{n|}\ddot{a}_{\overline{xy}} = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-(\delta-(1/2)\beta^2)k} {}_kp_{\overline{xy}} = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-(\delta-(1/2)\beta^2)k} \cdot [\hat{C}_{xy}(x,1) + \hat{C}_{xy}(1,y) - \hat{C}_{xy}(x,y)$，${}_hp_4 = \dfrac{{}_{n|}\ddot{a}_{\overline{xy}}}{\ddot{a}_{xy:\overline{h}|}}$。

形式（3）相当于延期年得终身年金，其精算现值及其 1 个单位的均衡年保费为：

${}_{n|}\ddot{a}_{xy} = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-(\delta-(1/2)\beta^2)k} {}_kp_{xy} = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-(\delta-(1/2)\beta^2)k} \cdot \hat{C}_{xy}(x,y)$，${}_hp_5 = \dfrac{{}_{n|}\ddot{a}_{xy}}{\ddot{a}_{xy:\overline{h}|}}$。

综上可得，该家庭联合寿险保单的总均衡年保费为：

$$P_h = R_1({}_hp_1 + {}_hp_2) + a_1R_{2h}p_4 + a_2R_{2h}p_5(a_1, a_2 > 1) \tag{10}$$

5 结论

当把相关个体间的关系简单的当做独立来处理，会导致保费的增加，进而损害了投保人的利益。而用条件 Copula 函数处理个体关系，比普通 Copula 函数更有利于投保人。这是因为条件 Copula 函数考虑了家庭联合寿险的前提条件，所以比普通 Copula 函数更加符合实际，也更加精确。并且当采用同种 Copula 函

数时，个体间的相关程度越高时，保费也会相应的有所增加。

参考文献

[1] Nelson R B. An introduction to Copulas：lecture notes in statistics [M]. New York：Springer，1998.

[2] 邹焱，许谨良，赵学林. 夫妻联合两全养老金保险 [J]. 经济数学，1992，9（1）：93–97.

[3] 罗琰. 随机利率下夫妻联合寿险模型[J]. 南京审计学院学报，2005，2(4)：33–35.

[4] 明杰秀，李波. 一种改进的单亲家庭联合保险的精算模型 [J]. 华中师范大学学报，2010，44（1）：8–10.

[5] Hee kyung Youn，Arkady Shemyakin，Edwin Herman. A Re–examination of the joint mortality functions[J]. North American Actuarial Journal，2002，6(1)：166–170.

[6] Patton A. Modeling time–varying exchange rate dependence using the conditional Copula [R]. San Diego：Working Paper of University of California at San Diego，2000.

[7] 翁小艳. 条件阿基米德 Copula [D]. 西南交通大学，2008.

[8] 韦艳华，张世英. Copula 理论及其在金融分析上的应用 [M]. 北京：清华大学出版社，2008.

[9] 杨静平. 寿险精算基础 [M]. 北京：北京大学出版社，2002.

[10] 樊平毅. 随机过程理论与应用 [M]. 北京：清华大学出版社，2005.

https://doi.org/10.35534/tms.0202007