理论数学前沿
2020 年 6 月第 2 卷第 2 期

Filling Function Method for Unconstrained Global Minimization

Yue Zhongqi

Shenyang Normal University, Shenyang

Abstract: Filling function method is an effective method to solve unconstrained global minimization problem. The key of this method is to construct filling function. This method was first proposed by GE renpuzhong. In this paper, considering the optimization problem, according to Lipschitz continuous function, a new single parameter filling function is constructed, and the filling property can be guaranteed when the parameter is small.

Key words: Global optimization; Filling function method; Minimum point

Received: 2020-05-07; Accepted: 2020-05-22; Published: 2020-05-24

文章引用：岳钟琦．填充函数法求解无约束全局极小化问题［J］．理论数学前沿，2020，2（2）：52–58.
https://doi.org/10.35534/tms.0202008

填充函数法求解无约束全局极小化问题

岳钟琦

沈阳师范大学，沈阳

邮箱：zqyue.00@126.com

摘　要：填充函数法是一种求解无约束全局极小化问题的有效方法，这种方法的关键是构造填充函数。该方法最早是由葛仁溥中提出。文中在考虑优化问题，根据为 Lipschitz 连续函数，构造了一个新的单参数填充函数，并且该填充函数在参数较小时能够保证其填充性质。

关键词：全局优化；填充函数法；极小点

收稿日期：2020-05-07；录用日期：2020-05-22；发表日期：2020-05-24

https://doi.org/10.35534/tms.0202008

1 引言

填充函数的定义最早是由葛仁溥在文献［1］中提出的。填充函数算法由极小化和填充两个阶段组成，且这两个阶段交替进行，它的基本思想是：通过构造一个辅助的填充函数，由当前目标函数的一个局部极小点x_1^*找到另一个更好的局部极小点。

下面给出葛仁溥在文献［1］中有关填充函数 F（x）的定义：

（1）x_1^*是 F（x）的极大点，并且（f x）在点x_1^*的整个盆谷B_1^*成为 F（x）在点x_1^*的山域的一部分；

（2）在（f x）的比B_1^*高的盆谷中，F（x）没有极小点和鞍点；

（3）若在（f x）有比B_1^*更低的盆谷，那么在此盆谷中存在点 x´，x´在包含 x´和x_1^*的连线上极小化 F（x）。

在［1］中，葛仁溥给出了如下的填充函数：

$$P(x,x_1^*,r,\rho)=\frac{1}{r+f(x)}\exp\left(-\frac{\|x-x_1^*\|}{\rho^2}\right) \qquad (1)$$

从（1）中我们可以看出，$P(x,x_1^*,r,\rho)$ 含有两个参数，不易选取和调节。并且当参数 ρ 充分小时，$\exp\left(-\frac{\|x-x_1^*\|}{\rho^2}\right)$将会趋于无穷会使得（1）接近于 0，从而找到假的平稳点，也可能丢失（f x）的全局极小 ρ 点。文献 [2，3，4] 对填充函数的定义进行了修改，并提出了仅含一个参数且性质较好的填充函数。文献 [5，6] 也分别相应的提出了填充函数新的形式。本文在以上文献的基础上，参考文献 [4，5] 中所给出的填充函数的构造思想，给出了一类新的连续的单参数的填充函数。

2 假设与定义

文中考虑如下问题（P）：

$$\min f(x) \quad s.t. x\in R^n \qquad (2)$$

假设 f（x）满足下列条件：

（1）f（x）在 R^n 上是 Lipschitz 连续的，即存在常数 L，使得对任意的 x，

$y \in R^n$，有$|f(x)-f(y)| \leqslant L||x-y||$;

（2）（P´）满足问题强制性条件，即$||x||\to+\infty, f(x)\to+\infty$;

（3）问题（P）的局部极小值的个数为有限个。由假设（2）知，存在一个有界闭区间 Ω 奂 R^n，使得 f（x）的全部全局极小点全部包含在 Ω 的内部。因此，（2）式等价于求问题（P´）：

minf（x）s.t.$x \in \Omega$

定义 1［2］：函数 $F(x,x_1^*,\rho)$ 被称为函数 f（x）在点x_1^*的填充函数，若 $F(x,x_1^*,\rho)$满足下列 3 条性质：在 Ω 上x_1^*是 $F(x,x_1^*,\rho)$的一个严格局部极大点；

对任意的 $x \in S_1$，有$\nabla F(x,x_1^*,\rho)\neq 0$，其中$S_1=\{x|f(x)\geqslant f(x_1^*),x\in\Omega\backslash\{x_1^*\}\}$。即是说$F(x,x_1^*,\rho)$在 S_1 上没有鞍点。

若x_1^*不是全局极小点。则 $F(x,x_1^*,\rho)$ 在在 $S_1=\{x|f(x)<f(x_1^*),x\in\Omega\}$上必有局部极小点。

定义 2［4］：令$A=\{x|f(x)=f(x_1^*),x\neq x_1^*\}$

3　新的填充函数及其性质

对于问题（P´），给出一个新的单参数填充函数，形式如下：

$$F(x,x_1^*,\rho)=-\varphi(f(x)-f(x_1^*))\left|\left|x-x_1^*\right|\right|^2+\rho\max\{0,f(x)-f(x_1^*)\}$$

其中：$\varphi(t)=\begin{cases}1 & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$，$x_1^*$是 f（x）的当前局部极小点，$\rho>0$ 为参数。

下面，我们给出新的单参数填充函数 $F(x,x_1^*,\rho)$的性质并满足定义。

定理 1：$F(x,x_1^*,\rho)$在 Ω/A是连续可微的。

证明：1）若$x\in\{x|f(x)>f(x_1^*),x\neq x_1^*\}$则

$$F(x,x_1^*,\rho)=-\left|\left|x-x_1^*\right|\right|^2+\rho(f(x)-f(x_1^*))$$

$$\nabla F(x,x_1^*,\rho)=\rho\nabla f(x)$$

2）若$x\in\{x|f(x)<f(x_1^*),x\neq x_1^*\}$则

$$F(x,x_1^*,\rho)=0$$

$$\nabla F(x,x_1^*,\rho)=\rho\nabla f(x)。$$

因此，$F(x,x_1^*,\rho)$在 Ω/A上连续可微的。证毕。

https://doi.org/10.35534/tms.0202008

定理 2：若 $y \in A$，那么 y 是 $F(x,x_1^*,\rho)$ 的不连续点。

证明：当 $y \in A$ 时，有 $f(y)=f(x_1^*)$ 且 $y \neq x_1^*$ 假设当 $k \to \infty$ 时，$\{x_k\} \to y$。

如果 $\{x_k\} \subset S_2$，则

$\neq$

$=-||y-x_1^*||^2+\rho[f(y)-f(x_1^*)]$,

如果 $\{x_k\} \subset S_2$，则 $\lim\limits_{k\to+\infty} F(x,x_1^*,\rho)=0$。

显然，因为 $-||y-x_1^*||^2 \neq 0$. 因此 $-||y-x_1^*||^2+\rho[f(y)-f(x_1^*)] \neq 0$。

所以，$y \in A$，那么 y 是 $F(x,x_1^*,\rho)$ 的不连续点。证毕。

定理 3: 设 x_1^* 是问题(P)的局部极小点，则 x_1^* 是 $F(x,x_1^*,\rho)$ 的一个局部极大点。其中，我们选取 $0<\rho<c/L$, $||x-x_1^*|| \leqslant c$。

证明：因 x_1^* 是问题的局部极小点，则存在 x_1^* 的领域 $N(x_1^*,\delta^*)$，s.t. 任意 $x \in N(x_1^*,\delta^*)$, $\delta^*>0$, $x \neq x_1^*$，有有 $f(x) \geqslant f(x_1^*)$。

故，对任意 $x \in N(x_1^*,\delta^*)$, $\delta^*>0$, $x \neq x_1^*$，有：

$F(x,x_1^*,\rho)=-||x-x_1^*||^2+\rho(f(x)-f(x_1^*))$

$\leqslant -||x-x_1^*||^2+\rho(L||x-x_1^*||)$

因 $0<\rho<c/L$, $||x-x_1^*|| \leqslant c$,

所以，$\rho(L||x-x_1^*||)-||x-x_1^*||<c^2-c^2=0=F(x_1^*,x_1^*,\rho)$

故，对任意 $x \in N(x_1^*,\delta^*)$, $\delta^*>0$，有 $F(x,x_1^*,\rho)<F(x_1^*,x_1^*,\rho)$。

因此，x_1^* 是 $F(x,x_1^*,\rho)$ 的一个局部极大点。证毕。

定理 4: 对任意 $x \in S_1$, $\nabla F(x,x_1^*,\rho) \neq 0$。即函数 $F(x,x_1^*,\rho)$ 在 S_1 上没有平稳点。

证明：因 $x \in S_1$，则 $f(x) \geqslant f(x_1^*)$, $x \neq x_1^*$。

有：$F(x,x_1^*,\rho)=-||x-x_1^*||^2+\rho(f(x)-f(x_1^*))$

$\nabla F(x,x_1^*,\rho)=-2(x-x_1^*)+\rho\nabla f(x)$

（1）若 $\nabla f(x)=0$，则 $\nabla F(x,x_1^*,\rho)=-2(x-x_1^*) \neq 0$;

（2）若 $\nabla f(x) \neq 0$，则 $d=\dfrac{x-x_1^*}{||x-x_1^*||}$, $d^T(x-x_1^*)>0$, 且 $d^T\nabla f(x) \geqslant 0$。

所以，d 是 $F(x,x_1^*,\rho)$ 在 x 点处的下降方向。

$\nabla F(x,x_1^*,\rho)^T d=-2||x-x_1^*||+\rho\dfrac{\nabla f(x)^T(x-x_1^*)}{||x-x_1^*||}$

（1）若$\nabla f(x)^T(x-x_1^*)\leqslant 0$，则$\nabla F(x,x_1^*,\rho)^T d<0$

（2）若$\nabla f(x)^T(x-x_1^*)>0$，当 ρ 充分小时，有$\nabla F(x,x_1^*,\rho)^T d<0$。

故，对$x\in S_1,\nabla F(x,x_1^*,\rho)\neq 0$。

定理 5：若当前局部极小点x_1^*不是问题（P´）的全局极小点，即问题（P´）存在另一个局部极小点x_0^*满足$f(x_0^*)<f(x_1^*)$，并存在x_0^*的一个领域$N(x_0^*,\delta_0^*)$，$\delta_0^*>0$，使得对任意 $\overline{x_0^*}\in N(x_0^*,\delta_0^*),F(x,x_1^*,\rho)$ 在$\overline{x_0^*}$与x_1^*的连线 Q 上有极小点，且极小点落在 f（x）的盆域B_0^*中。

证明：设 x´是$\overline{x_0^*}$与x_1^*的连线 Q 上的任意一点，令$M=\{x|f(x)=f(x_1^*),x\in R^n\}\cap Q$，若$x_1\in M$，则$x_1\in Q,f(x)=f(x_1^*)$。故，$F(x,x_1^*,\rho)=-||x-x_1^*||^2$ 1) $\exists\,\varepsilon_0>0$，当 $x'\in(x_1-\varepsilon_0,x_1)$时，$x'\in Q,||x'-x_1^*||\leqslant||x_1-x_1^*||$　$f(x')>f(x_1)=f(x_1^*)$。

所以，$F(x',x_1^*,\rho)=-||x'-x_1^*||^2+\rho(f(x')-f(x_1^*))\geqslant-||x'-x_1^*||^2+0=F(x_1,x_1^*,\rho)$

2）$\exists\,\varepsilon_0>0$,当 $x'\in(x_1,x_1+\varepsilon_0)$ 时，$x'\in Q,||x'-x_1^*||\geqslant||x_1-x_1^*||$　$f(x_0^*)\leqslant f(x')<f(x_1^*)$。

所以，$F(x',x_1^*,\rho)=0\geqslant||x_1-x_1^*||=F(x_1,x_1^*,\rho)$

故，$F(x,x_1^*,\rho)$在$\overline{x_0^*}$与x_1^*的连线 Q 上的任意一点 x_1 上达到极小，且落在 f（x）的盆域B_0^*中。

由以上的定理 1–5 可知，$F(x,x_1^*,\rho)$是满足填充函数定义的填充函数。

4　结语

文中给出的填充函数 $F(x,x_1^*,\rho)$ 仅含有一个参数且是连续的，同时满足填充函数的定义和性质。

参考文献

［1］Ge R． A filled functions method for finding a global minimizer of a function of several variables［J］． Mathematical Programming，1990，46：191–204．

［2］Yang Y J，Shang Y L． A new filled function method for unconstrained global optimization［J］． Applied Mathematics and Computation，2006（173）：501–512．

[3] Zhang L S，NG C K，Li D．A new filled function method for global optimization [J]．Global Optim，2001，20：49–65．

[4] Gao Changliang，Yang Yongjian，Hua Boshun．A new class of filled functions with one parameter for global optimization [J]．Computers and Mathematics with Applications，2011 (62)：2393–2403．

[5] Luo S Y，Ye Z Q．A modified single–parameter filled function method for global optimization [J]．Computer Technology and Development，2008，18 (8)：108–110．

[6] Liu J，Ye Z Q．A new class of filled functions for finding global optimization [J]．Computer Technology and Development，2010，20 (6)：36–38．