理论数学前沿
2020 年 6 月第 2 卷第 2 期

Equivalence Proof of Convexity of Binary in Semicontinuous Function

Deng Weijia

Hubei University, Wuhan

Abstract: By using binary, a proving on the equivalence of convexity of function is given, which discloses the equivalence of two definitions on convexity of function with semi-continuous and shows the essential relations between semi-continuity and convexity.

Key words: Binary; Semi-continuity; Convexity

Received:2020-05-11;Accepted:2020-05-26;Published:2020-05-28

二进制在半连续函数凸性的等价性证明

邓韦佳

湖北大学，武汉

邮箱：wjd.2007@hotmail.com

文章引用：邓韦佳．二进制在半连续函数凸性的等价性证明［J］．理论数学前沿，2020，2（2）：59–65．
https://doi.org/10.35534/tms.0202009

摘　要：通过二进制思想给出定义在区间上的半连续函数的凸性的一个等价性结论的证明，揭示了函数在半连续条件下凸性的两种定义的等价性，显示了半连续与凸性的本质上的相关性。

关键词：二进制；半连续；凸性

收稿日期：2020-05-11；录用日期：2020-05-26；发表日期：2020-05-28

1　引言

众所周知，经典的数学分析给出的函数凸性的定义为：

设 f 为定义在区间 I 上的函数，若对 I 上任意两点 x_1、x_2，及任意实数 $\lambda \in (0, 1)$，总有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \tag{1}$$

则称 f 为区间 I 上的下凸函数（也称为凸函数）。其本质是：若 f 在 $x_0 \in I$ 处有切线，则切线总在图像下方。对应地，设 f 为定义在区间 I 上的函数，若对 I 上任意两点 x_1、x_2，及任意实数 $\lambda \in (0, 1)$，总有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

则称 f 为区间 I 上的上凸函数（也称为凹函数）。其本质是：若 f 在 $x_0 \in I$ 处有切线，则切线总在图像上方。

另一方面，对于函数 f，若满足：对 I 上任意两点 x_1、x_2，总有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) \tag{2}$$

一般也可推测到：若 f 在 $x_0 \in I$ 处有切线，则切线总在图像上方。从而可以得出：称 f 为区间 I 上的凸函数的结论。事实上，也有一些教材把满足条件（2）作为凸函数的定义。这自然引发一个问题：（1）与（2）是等价的吗？本文比较完整地来回答这一问题。

2 预备知识

定义 1 设函数 f 定义在区间 I 上，

（1）若$x_0 \in I$且有，则称函数$\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x) \geqslant f(x_0)$，处下半连续；若函数 f 在区间 I 上每一点处都下半连续，则称函数 f 在区间 I 上下半连续；

（2）若$x_0 \in I$且有$\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x) \leqslant f(x_0)$，则称函数 f 在 x_0 处上半连续；若函数 f 在区间 I 上每一点处都上半连续，则称函数 f 在区间 I 上上半连续。由上述定义及上下极限的定义，下面的结论显然易见：

引理 1 设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上，则有

（1）函数 $f(x)$ 在 $x_0 \in I$ 处下半连续的充要条件是函数 $-f(x)$ 在 $x_0 \in I$ 处上半连续；

（2）函数 $f(x)$ 在区间 I 上下半连续的充要条件是函数 $-f(x)$ 在区间 I 上上半连续。

3 主要结果

定理 2 设 f 为定义在区间 I 上的下半连续函数，则如下两个说法等价：

（1）对 I 上任意两点 x_1、x_2，及任意的实数 $\lambda \in (0,1)$，总有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

（2）对 I 上任意两点 x_1、x_2，总有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2)$$

证明：

（1）⇒（2）：设（1）成立，则在（：1）中令$\lambda = \dfrac{1}{2}$即得（2）；

（2）⇒（1）：设（2）成立，以下分三种情形来证明：

https://doi.org/10.35534/tms.0202009

（1）先证：$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^k}}{2^k}\right)\leqslant\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k}f(x_i)$。

事实上，k=1 即得（2），故结论成立。

设 k=m 时成立，即

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^m}}{2^m}\right)\leqslant\frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{2^m}f(x_i) \tag{3}$$

而 k=m+1 时，记 $y_1=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^m}}{2^{m+1}}$，$y_2=\frac{x_{2^m+1}+x_{2^m+2}+\cdots+x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}$，由区间 I 是凸集可知 $y1\in I$、$y_2\in I$，于是由（2）及（3）得

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)\\
&=f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^m}}{2^{m+1}}+\frac{x_{2^m+1}+x_{2^m+2}+\cdots+x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)\\
&=f\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^m}}{2^m}\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{2}\cdot\frac{x_{2^m+1}+x_{2^m+2}+\cdots+x_{2^{m+1}}}{2^m}\right)\\
&=f\left(\frac{1}{2}\cdot y_1+\frac{1}{2}\cdot y_2\right)\leqslant\frac{1}{2}f(y_1)+\frac{1}{2}f(y_2)\\
&=\frac{1}{2}f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^m}}{2^m}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}f\left(\frac{x_{2^m+1}+x_{2^m+2}+\cdots+x_{2^{m+1}}}{2^m}\right)\\
&\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{2^m}f(x_i)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^m}\sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}}f(x_i)\\
&=\frac{1}{2^{m+1}}\sum_{i=1}^{2^{m+1}}f(x_i)
\end{aligned}$$

于是由数学归纳法知，$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^k}}{2^k}\right)\leqslant\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k}f(x_i)$对一切正整数 k 成立。

（2）设 λ 为非零二进纯有限小数，即

$\lambda=\frac{\varepsilon_1}{2}+\frac{\varepsilon_2}{2^2}+\cdots\frac{\varepsilon_k}{2^k}$，（$\varepsilon_i$ 为 0 或 1，$i=1,2,3,\cdots,k;\varepsilon_k=1$）

则存在正整数 $m<2^k$ 使得 $\lambda=\frac{m}{2^k}$，由于 $\frac{m}{2^k}x_1+\left(1-\frac{m}{2^k}\right)x_2=\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k}y_i$，其中 $y_1=y_2=\cdots=y_m=x_1, y_{m+1}=y_{m+2}=\cdots=y_{2^k}=x_2$

则由（2）的结论知

$$f\left[\frac{m}{2^k}x_1+\left(1-\frac{m}{2^k}\right)x_2\right]=f\left(\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k}y_i\right)\leqslant\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k}f(y_i)=\frac{m}{2^k}f(x_1)+\left(1-\frac{m}{2^k}\right)f(x_2)$$

即 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$,

故（1）成立。

（3）设 λ 为正二进纯小数，则由实数理论知，存在一列正二进有限纯小数 $\{\lambda_i\}$，使得 $\lim_{i\to\infty}\lambda_i=\lambda$，注意到 $\lim_{i\to\infty}(1-\lambda_i)=1-\lambda$，由函数的下半连续性及下极限的单调性，可得

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\overline{\lim_{i\to\infty}}f(\lambda_i x_1+(1-\lambda_i)x_2)\leqslant\overline{\lim_{i\to\infty}}[\lambda_i f(x_1)+(1-\lambda_i)f(x_2)]$$
$$=\lim_{i\to\infty}[\lambda_i f(x_1)]+\lim_{i\to\infty}[(1-\lambda_i)f(x_2)]=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

这就证明了（1）成立，从而（1）与（2）的等价性得证。

结合数学分析中关于凸函数的定义，可得如下：

推论 1　设 f 为定义在区间 I 上的下半连续函数，则函数 f 在 I 上是凸函数的充分必要条件是：对 I 上任意两点 x_1、x_2，总有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)。$$

与定理 2 相对应，进一步可得

定理 3　设 f 为定义在区间 I 上的上半连续函数，则如下两个说法等价：

（1）对 I 上任意两点 x_1、x_2，及任意的实数 $\lambda\in(0，1)$，总有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

（2）对 I 上任意两点 x_1、x_2，总有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)$$

证明：可用定理 2 的思路，分成三大步来证明．这只要对定理 2 证明中的相应文字作相应的改动即可。但考虑到定理 3 中的不等式及函数的上半连续与下半连续的关系，可直接利用定理 2 得如下证明：由 f 为定义在区间 I 上的上半连续函数，知 $-f=g$ 为定义在区间 I 上的下半连续函数。显然（1）、（2）分别

https://doi.org/10.35534/tms.0202009

等价：

（1´）对 I 上任意两点 x_1、x_2，及任意的实数 $\lambda \in (0, 1)$，总有

$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2)$

（2´）对 I 上任意两点 x_1、x_2，总有 g

于是利用定理 2 直接得（1）⇔（1´）⇔（2´）⇔（2），证毕。

结合数学分析中关于凹函数的定义，可得

推论 2　f 为定义在区间 I 上的上半连续函数，则函数 f 在 I 上是凹函数的充分必要条件是：对 I 上任意两点 x_1、x_2，总有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)。$$

进一步，由函数的半连续性蕴含连续性，又易得

推论 3　设 f 为定义在区间 I 上的连续函数，则

（1）函数 f 在 I 上是凸函数的充分必要条件是：对 I 上任意两点 x_1、x_2，总有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)。$$

（2）f 为定义在区间 I 上的上半连续函数，则函数 f 在 I 上是凹函数的充分必要条件是：对 I 上任意两点 x_1、x_2，总有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)。$$

利用推论 3 中的（1），易证关于凸函数的一个经典结论：设 f 为定义在区间 I 上的二阶可导函数，若 f 的二阶导函数在 I 上恒非负，则 f 为 I 上的凸函数。事实上，显然 f 在 I 上连续．又设 x_1，$x_2 \in I$，$x_1 < x_2$。由条件，由拉格朗日中值定理，存在

$$\xi_1 \in \left(x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right), \xi_2 \in \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right) \text{ 及 } \xi \in (\xi_1, \xi_2)$$

使得

$$f\left(\frac{x_1+x}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)\right) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1)\right] - \frac{1}{2}\left[f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}f'(\xi_1)\frac{x_2-x_1}{2} - \frac{1}{2}f'(\xi_2)\frac{x_2-x_1}{2} = -(f'(\xi_2) - f'(\xi_1))\frac{x_2-x_1}{4}$$

$$= -f''(\xi)\frac{x_2-x_1}{4}(\xi_2 - \xi_1)$$

$$\leqslant 0$$

即得

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)$$

从而由推论 3 的（1）知结论成立。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析 [M]. 北京：高等教育出版社，2001.
[2] 张从军. 集值分析与经济应用 [M]. 北京：科学出版社，2004.

https://doi.org/10.35534/tms.0202009