理论数学前沿
2021 年 3 月第 3 卷第 1 期

高等数学中一些常见不等式证明的教学问题剖析

张付臣　张光云

重庆工商大学数学与统计学院，经济社会应用统计重庆市重点实验室，重庆

摘　要 | 面对财经类高校的大学生，本文探讨了不等式证明的一些常见方法，如拉格朗日中值定理法、函数单调性方法、最大值和最小值方法等等，并且举例剖析，便于学生比较和记忆，增强了教学和学习的效率，从而提高学生分析问题和解决问题的能力。

关键词 | 高等数学；不等式；教学方法；教学探讨

1　引言

不等式是财经类高校大学生中高等数学课程的重要内容[1-4]，许多同学对不等式的证明感到非常困惑和不解。因此，掌握不等式证明的一些常见方法对于财经类高校的大学生来说显得非常重要。本文总结了不等式证明的一些常见方法与技巧，便于学生比较和记忆，从而提高学生分析问题和解决问题的能力，同时也提高了课堂教学的效率。

基金项目：重庆工商大学教育教学改革项目（编号：2018106）。
通讯作者：张付臣，重庆工商大学数学与统计学院，博士，副教授。E-mail：zhangfuchen1983@163.com。
文章引用：张付臣，张光云．高等数学中一些常见不等式证明的教学问题剖析［J］．理论数学前沿，2021，3（1）：19-22．
https://doi.org/10.35534/tms.0301004

2 拉格朗日中值定理方法

拉格朗日中值定理是证明不等式的一种常见方法，要使学生掌握和灵活运用这种方法，首先必须掌握拉格朗日中值定理的内容，

定理 1[1]. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

对于高等数学初学者来说，一定要熟练的记忆上述定理。因为只有熟练掌握定理的内容从能够灵活运用。该定理可以用来证明一些不等式，下面举例说明。

例 1：证明 $\dfrac{b-a}{b}\leqslant \ln\dfrac{b}{a}\leqslant\dfrac{b-a}{a}$ $(0<a<b)$.

证：令 $f(x)=\ln x$，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，并且 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $x\in(a, b)$ 内有意义，从而 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内可导，所以 $f(x)=\ln x$ 满足拉格朗日中值定理的条件。

从而，$\ln\dfrac{b}{a}=\ln b-\ln a=f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)=\dfrac{(b-a)}{\xi}$，$0<a<\xi<b$.

由于 $0<a<\xi<b$，且 $g(x)=\dfrac{1}{x}$，$x>0$ 为反比例函数，所以 $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{a}$. 在上述不等式两边同乘以正数 $b-a$ 得 $\dfrac{b-a}{b}\leqslant\dfrac{b-a}{\xi}\leqslant\dfrac{b-a}{a}$. 即 $\ln\dfrac{b}{a}=\ln b-\ln a=\dfrac{b-a}{\xi}\in\left[\dfrac{b-a}{b}, \dfrac{b-a}{a}\right]$ 成立。

注释：在给学生讲授运用拉格朗日中值定理证明不等式的例题时，应该让学生明白使用拉格朗日中值定理证明不等式前提是要证明的不等式的中间部分 $\ln\dfrac{b}{a}$ 一般可以写成一个函数 $f(x)=\ln x$ 在点 b 与点 a 的函数值的差，即有 $\ln\dfrac{b}{a}=\ln b-\ln a$. 这是问题的关键。

3 一元函数单调性方法

运用一元函数的单调性也可以证明一些不等式。

例 2：证明当 $x>0$ 时，$x>\ln(1+x)$.

证：$h(x)=x-\ln(1+x)$，则 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，在 $(0, +\infty)$ 上可导，并且有 $h'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}>0$，$x\in(0, +\infty)$. 所以 $h(x)=x-\ln(1+x)$

在 $[0, +\infty)$ 上为单调递增函数。从而当 $x>0$ 时，有 $h(x)>h(0)=0$. 所以当 $x>0$ 时，$x>\ln(1+x)$ 成立。

注释：在给学生讲授运用函数的单调性证明不等式的例题时，关键是首先让学生明白 $x>\ln(1+x) \Leftrightarrow x-\ln(1+x)>0$，这样就可以找出所用到的函数 $h(x)=x-\ln(1+x)$。

另一方面，必须把所需要证明的不等式 $x-\ln(1+x)>0$ 的右端 0 写为函数 $h(x)$ 在某点处的函数值，在这里就是 $0=h(0)$. 这样就把所要证明的问题“证明当 $x>0$ 时，$x>\ln(1+x)$。”转换为“证明当 $x>0$ 时，$h(x)>h(0)$.”很明显如果能够证明 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为单调递增函数，则问题得到解决。

4　运用函数的最大值和最小值方法

财经类高校大学生中高等数学课程的学习中，除了可以利用拉格朗日中值定理和函数的单调性来证明不等式之外，还可以运用函数的最大值和最小值来证明不等式，下面举例说明。

例 3：证明 $\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p+(1-x)^p \leqslant 1$，其中 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$p>1$.

证明：令 $g(x)=x^p+(1-x)^p$，$x \in [0, 1]$. 因为 $g(x)$ 为闭区间 $[0, 1]$ 上的连续函数，所以根据闭区间上连续函数的性质可知，$g(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 存在最大值和最小值。下面求该最大值和最小值。令 $g'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}=0$，得 $g(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 内唯一驻点 $x=\frac{1}{2}$. 经过计算可知 $g(0)=g(1)=1$，$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{p-1}}$. 经过计算比较且由于 $p>1$，所以 $\max\limits_{x \in [0,1]} g(x)=1$，$\min\limits_{x \in [0,1]} g(x)=\frac{1}{2^{p-1}}$. 即不等式 $\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p+(1-x)^p \leqslant 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 1, p>1)$ 成立。

5　结论

本文讨论了财经类高校高等数学这门课程中常见不等式证明的一些授课技巧，提高了大学生学习的兴趣和课堂的效率，也提高了大学生分析和解决问题的能力。

https://doi.org/10.35534/tms.0301004

参考文献

[1] 李霄民，李庆玉．微积分（上册）[M]．第二版．北京：高等教育出版社，2019：157–183．

[2] 赵树嫄．微积分 [M]．第三版．北京：中国人民大学出版社，2012．

[3] 陈丽，周杨，闵心畅．微积分上册 [M]．北京：中国人民大学出版社，2019．

[4] 杨爱珍．微积分 [M]．第二版．上海：复旦大学出版社，2012．

Analysis of Teaching Problems of the Inequality Proof in Higher Mathematics in Finance and Economics Colleges

Zhang Fuchen　Zhang Guangyun

Chongqing Key Laboratory of Social Economy and Applied Statistics, College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing

Abstract: Facing the college students of finance and economics, this paper discusses some methods of inequality proof, such as Joseph-Louis Lagrange's mean value theorem method, function monotonicity method, maximum and minimum method, etc. , facilitate the students to understand and memory, enhance the efficiency of teaching and learning, so as to improve students'ability to analyze and solve problems.

Key words: Higher mathematics; Inequality; Teaching method; Teaching discussion