教育研讨
2021 年 8 月第 3 卷第 3 期

用力矩分配法计算具有抗移弹性支座的超静定结构

孙 云

扬州大学建筑科学与工程学院，扬州

摘 要 | 工程实际中的支座更接近于弹性支座，研究此类支座下超静定结构的计算具有工程实际意义。文中提出用力矩分配法计算具有抗移弹性支座的超静定结构，首先推导了具有抗移弹性支座的单跨超静定梁的转动刚度以及常见荷载作用下梁的固端弯矩，然后给出了超静定刚架的具体算例。

关键词 | 抗移弹性支座；力矩分配法；转动刚度；固端弯矩

常用的刚性支座如活动铰支座、固定铰支座和固定支座是一种理想化的支座，工程实际中的支座更接近于弹性支座，例如抗转弹性支座、抗移弹性支座等，因此讨论弹性支座上超静定结构的计算具有工程实际意义。力矩分配法不需建立和求解典型方程，物理概念生动形象，适合于手算，是一种简便易行的方法[1]。郭绍臣[2]提出了用力矩分配法计算抗转弹性支座上的刚架，导出了抗转弹性支座梁的形常数与载常数的计算公式。本文将研究用力矩分配法对具有抗移弹性支座的超静定结构进行计算。首先推导了具有抗移弹性支座单跨超静定梁的转动刚度和常见荷载作用下梁的固端弯矩，然后给出超静定刚架的具体算例。

1 具有抗移弹性支座单跨超静定梁的转动刚度（形常数）

由于刚性支座上单跨超静定梁的转动刚度不能应用于弹性支座，需推导出具有抗移弹性支座的单跨超静定梁的转动刚度。图 1（*a*）为 *B* 端具有抗移弹性支座的单跨超静定梁，设抗移弹性支座的刚度为 k。当 *A* 端转动单位角时，*A* 端的弯矩即为 *A* 端的转动刚度，用 S_{AB} 表示，其可用力法计算出。选取力法的基本体系如图 1（*b*）所示，则力法方程为：

作者简介：孙云，扬州大学建筑科学与工程学院，副教授，研究方向：结构的非线性分析。E-mail：syun@yzu.edu.cn。
文章引用：孙云．用力矩分配法计算具有抗移弹性支座的超静定结构［J］．教育研讨，2021，3（3）：468-473.
https://doi.org/10.35534/es.0303073

$$\delta_{11}X_1=1 \tag{1}$$

作出 $\overline{M}_1$ 图如图 1（c）所示，此时 B 端的竖向反力为 $1/l$，方向向上。根据图乘法得：

$$\delta_{11}=\frac{l}{3EI}+\frac{1}{kl^2} \tag{2}$$

将式（2）代入式（1），得：

$$X_1=\frac{3EI}{l}\frac{\beta}{\beta+3}$$

由转动刚度的定义可知 A 端的转动刚度 $S_{AB}=X_1$，式中 $\beta=\frac{kl^3}{EI}$，反映 B 端抗移弹性支座的影响系数，其值 $\beta\in[0,\infty)$。当 $k\to\infty$，即 $\beta\to\infty$ 时，相当于 B 端为活动铰支座，此时 $S_{AB}=3EI/l$。当 $k=0$，即 $\beta=0$ 时，相当于 B 端为自由端，此时 $S_{AB}=0$。当 $EI\to\infty$，即为刚性梁时，此时 $S_{AB}=kl^2$ [3]。

因为 B 端为铰支端，A 端向 B 端的传递系数 $C_{AB}=0$。

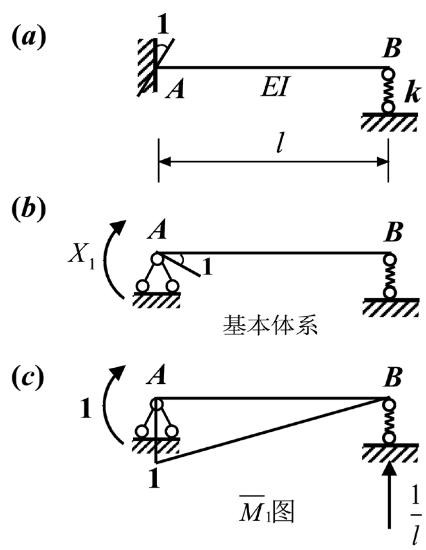


图 1　A 端转动单位角时，A 端的转动刚度

Figure 1　Rotation stiffness at end A when there is unit angle at end A

2　具有抗移弹性支座单跨超静定梁的固端弯矩（载常数）

用力矩分配法计算具有抗移弹性支座的超静定结构，还需知道对应的单跨超静定梁在常见荷载作用下的固端弯矩。下面以图 2（a）所示均布荷载作用下梁的固端弯矩计算为例进行介绍。选取力法的基本体系如图 2（b）所示，则力法方程为：

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1P}=0 \tag{3}$$

分别作 $\overline{M}_1$ 图、M_P 图，并求出相应的 B 端竖向反力如图 2（c）、（d）所示，则：

$$\delta_{11}=\frac{l}{3EI}+\frac{1}{kl^2},\quad \Delta_{1P}=\frac{ql^3}{24EI}+\frac{q}{2k} \tag{4}$$

将式（4）代入式（3），得：

$$X_1=-\frac{1}{8}ql^2\frac{\beta+12}{\beta+3}$$

https://doi.org/10.35534/es.0303073

则 A 端的固端弯矩 $M^F_{AB}=X_1$，当 $k\to\infty$ 时，B 端为活动铰支座，此时 $M^F_{AB}=-ql^2/8$。当 k=0 时，B 端为自由端，此时 $M^F_{AB}=-ql^2/2$。当 $EI\to\infty$ 时，即为刚性梁，此时 $M^F_{AB}=-ql^2/2$。

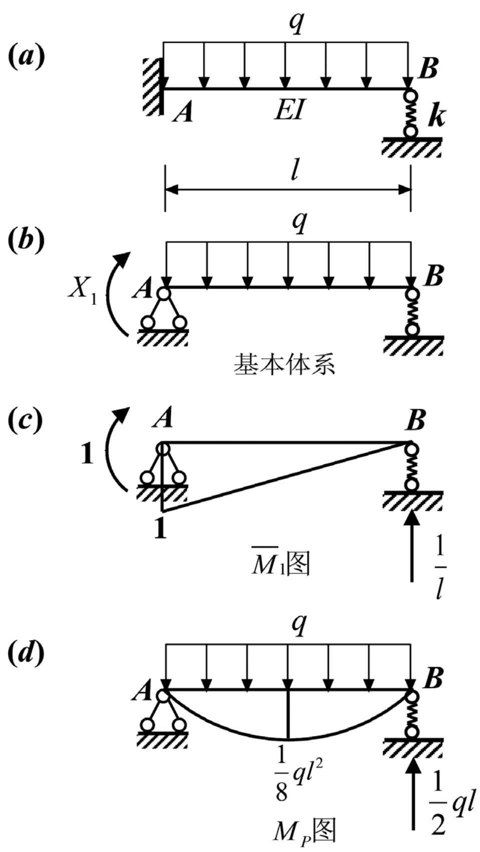


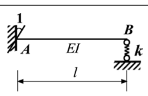
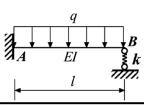
图 2　均布荷载作用下梁的固端弯矩

Figure 2　Fixed-end bending moment of the beam under uniformly distributed load

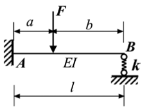
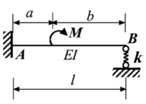
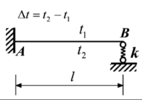
其它常见荷载作用下梁的固端弯矩的推导方法与均布荷载下的相同，此处不再赘述。为了应用方便，把具有抗移弹性支座单跨超静定梁在各种情况下 A 端的弯矩列于表 1 中，B 端弯矩恒有 M_{BA}=0。

表 1　各种情况下具有抗移弹性支座单跨超静定梁的杆端弯矩

Table 1　Bending moment at end A of single-span statically indeterminate beam with elastic translational support in various cases

编号	梁的简图	M_{AB}	当 $k\to\infty$ 时	当 k=0 时	当 $EI\to\infty$ 时
1		$\frac{3EI}{l}\ \frac{\beta}{\beta+3}$	$\frac{3EI}{l}$	0	kl^2
2		$-\frac{1}{8}ql^2\ \frac{\beta+12}{\beta+3}$	$-\frac{1}{8}ql^2$	$-\frac{1}{2}ql^2$	$-\frac{1}{2}ql^2$

续表

编号	梁的简图	M_{AB}	当 $k\to\infty$ 时	当 k=0 时	当 $EI\to\infty$ 时
3		$-\frac{Fab(l+b)}{2l^2}\cdot\frac{\beta+\frac{6l^2}{b(l+b)}}{\beta+3}$	$-\frac{Fab(l+b)}{2l^2}$	$-Fa$	$-Fa$
	当 $a=b=l/2$ 时	$-\frac{3Fl}{16}\cdot\frac{\beta+8}{\beta+3}$	$-\frac{3Fl}{16}$	$-\frac{Fl}{2}$	$-\frac{Fl}{2}$
4		$M\frac{l^2-3b^2}{2l^2}\cdot\frac{\beta-\frac{6l^2}{l^2-3b^2}}{\beta+3}$	$M\frac{l^2-3b^2}{2l^2}$	$-M$	$-M$
	当 $a=l$ 时	$\frac{M}{2}\cdot\frac{\beta-6}{\beta+3}$	$\frac{M}{2}$	$-M$	$-M$
5		$-\frac{3EI\alpha\Delta t}{2h}\cdot\frac{\beta}{\beta+3}$	$-\frac{3EI\alpha\Delta t}{2h}$	0	$-\frac{k\alpha\Delta t l^3}{2h}$

3 具体算例

由于具有抗移和抗转弹性支座[2]单跨超静定梁的转动刚度、传递系数和固端弯矩已经推导出，用力矩分配法计算此类弹性支座下超静定结构的方法与刚性支座下的完全相同。下面给出具体的算例，如图 3 所示的超静定刚架，B 端和 C 端有抗移弹性支座，刚度系数分别为 $k_1=\frac{5EI}{2l^3}$，$k_2=\frac{24EI}{l^3}$；D 端有抗转弹性支座，刚度系数为 $k_\theta=\frac{4EI}{l}$。试用力矩分配法计算图示荷载作用下超静定刚架的弯矩。

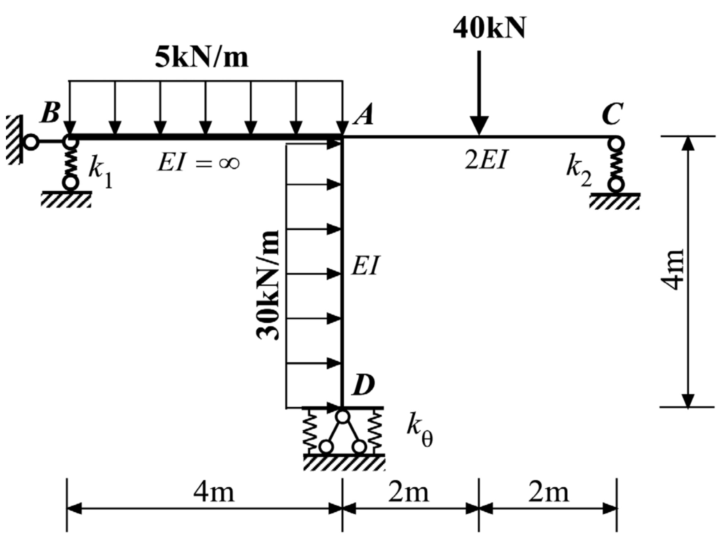


图 3 具有弹性支座的超静定刚架

Figure 3 A statically indeterminate rigid frame with elastic support

解：B、C端抗移弹性支座的影响系数分别为 β_1=2.5，β_2=24。D端抗转弹性支座的影响系数为 β_3=4[2]。

https://doi.org/10.35534/es.0303073

则各杆的转动刚度为：

$$S_{AB}=k_1 l^2=\frac{5EI}{8}，S_{AC}=\frac{3(2EI)}{l}\frac{\beta_2}{\beta_2+3}=\frac{4EI}{3}，S_{AD}=\frac{4EI}{l}\frac{\beta_3+3}{\beta_3+4}=\frac{7EI}{8}$$ [2]

分配系数为：

$$\mu_{AB}=\frac{S_{AB}}{S_{AB}+S_{AC}+S_{AD}}=0.221，\mu_{AC}=0.470，\mu_{AD}=0.309$$

传递系数为：

$$C_{AB}=C_{AC}=0，C_{AD}=\frac{0.5\beta_3}{\beta_3+3}=\frac{0.5\times 4}{4+3}=\frac{2}{7}$$ [2]

固端弯矩为：

$$M^F_{AB}=\frac{1}{2}ql^2=40\ \text{kN}\cdot\text{m}，M^F_{AC}=-\frac{3Fl}{16}\cdot\frac{\beta_2+8}{\beta_2+3}=-35.56\ \text{kN}\cdot\text{m}，$$

$$M^F_{AD}=\frac{1}{12}ql^2\cdot\frac{\beta_3+6}{\beta_3+4}=50\ \text{kN}\cdot\text{m}^{[2]}，M^F_{DA}=-\frac{1}{12}ql^2\cdot\frac{\beta_3}{\beta_3+4}=-20\ \text{kN}\cdot\text{m}^{[2]}$$

其余的计算列于表 2 中。

表 2　用力矩分配法计算具有弹性支座的超静定刚架

Table 2　Calculation of a statically indeterminate rigid frame with elastic support by moment distribution method

结点	B		A			D	C
杆端	BA	AB	AC	AD		DA	CA
分配系数		0.221	0.470	0.309			
固端弯矩		40	−35.56	50		−20	
分配与传递		<u>−12.03</u>	<u>−25.59</u>	<u>−16.82</u>	→	−4.81	
最后 M	0	27.97	−61.15	33.18		−24.81	0

4　结语

本文用力矩分配法对具有抗移弹性支座的超静定结构进行了分析，推导了具有抗移弹性支座单跨超静定梁的转动刚度以及常见荷载作用下梁的固端弯矩，并给出超静定刚架的具体算例。若已知弹性支座单跨静定梁的转动刚度、传递系数和固端弯矩，用力矩分配法计算此类弹性支座下超静定结构的方法与刚性支座下的完全相同，这拓宽了力矩分配法应用的支座范畴。而文中表 1 所列的抗移弹性支座梁的杆端弯矩是对结构力学教材中位移法所列的单跨超静定梁杆端弯矩的表格的极好补充。

参考文献

[1] 李廉锟．结构力学［M］．北京：高等教育出版社，2017：362．
[2] 郭绍臣．用力矩分配法计算弹性转动支座上的刚架［J］．沈阳建筑工程学院学报，1995．11（4）：337–340．
[3] 于玲玲，杨正光．结构力学（第二版）［M］．北京：中国电力出版社，2016：463．

Calculation of the Statically Indeterminate Structure With Elastic Translational Support Based on the Moment Distribution Method

Sun Yun

School of Civil Science and Engineering, Yangzhou University, Yangzhou

Abstract: The support in engineering is closer to the elastic support. It is of practical significance to study the calculation of statically indeterminate structures with such supports. This paper presents the analysis of the statically indeterminate structures with elastic translational support based on the moment distribution method. Firstly, the rotation stiffness and the fixed-end bending moment under common loads for the single-span statically indeterminate beam with elastic translational support are derived. An example of the statically indeterminate rigid frame is given in the end.

Key words: Elastic translational support; Moment distribution method; Rotation stiffness; Fixed-end bending moment