理论数学前沿
2022 年 6 月第 4 卷第 2 期

高等数学课程思政的教学与实践
——基于“大数定律”的教学案例

何　光

重庆工商大学数学与统计学院，重庆

摘　要 | 课程思政对高等数学教学提出了新的要求，教学实践中需结合思政要求，不断探索优化教学方法。本文以“大数定律”内容为例，基于课程思政要求设立教学目标，在教学中，注重引入、知识点讲解、课堂总结与课后延伸等多个环节，采用隐形渗透、提纲挈领、画龙点睛等方式，将思政教育落实到教学之中，实施课程思政。

关键词 | 高等数学；大数定律；思政教育

2020 年，教育部印发了《高等学校课程思政建设指导纲要》，全面推进高校课程思政建设。高等数学是理工类和部分社科类专业的公共基础课程，教师针对课程教学内容，通过融入课程思政理念，不断探索优化高等数学课程思政的教学方法。目前在高等数学课程教学的实践探索中，发现融入课程思政对学生的思想价值观的形成具有积极作用[1]。高等数学相关课程的教学中，主要通过课程教学资源、教学方式，以及教学评价等融入课程思政。在教学资源上，

基金项目：重庆市教委项目（KJQN202100815，KJ1500631）；重庆工商大学校级项目（1552004）。
作者简介：何光，男，重庆人，博士，重庆工商大学数学与统计学院副教授，研究方向：最优化理论及应用，E-mail：heguang6896@163.com。
文章引用：何光．高等数学课程思政的教学与实践——基于“大数定律”的教学案例［J］．理论数学前沿，2022，4（2）：43-51.
https://doi.org/10.35534/tms.0402006

挖掘课程资源中具有思政教育的元素[2]，在知识点的讲解上列举中国文化、时事或生活案例，以此加强学生的思想道德教育[3, 4]。在具体的教学实施中，需要契合教学的具体内容，在进行知识讲解的同时，做好课程思政。于此，本文基于高等数学体系中概率统计内容“大数定律”知识点，探讨具体知识点教学中的课程思政策略。

1 课前教学目标的设置

教学目标是教学实施的重要衡量标尺，课程思政教学要求在传统教学目标重知识与技能的基础上，关注课程思政目标的确定。于此，对“大数定律”教学内容在传统的知识与技能目标的基础上设置课程思政目标。知识与技能目标包括：理解大数定律的背景和概念；掌握三个大数定律的内容；会用大数定律解决实际问题；通过学习，学生能够发现现实生活中的大数定律问题、并能用学习的内容分析问题，独立解决问题，学以致用。课程思政目标包括：通过大数定律应用背景的介绍，帮助学生体会百折不挠、积极探索的科学精神，培养学生爱国主义精神，鼓励树立远大理想，为实现中华民族的复兴而奋斗；通过大数定律的逐步学习，培养学生的人文素养，建立正确的人生观和价值观，养成坚持不懈、持之以恒的品质。通过教学目标的设置，将课程思政也作为教学中的重要目标，和知识与技能目标共同引领课堂教学的实施。

2 教学实施环节

教学实施中，紧扣教学目标，采用隐形渗透、提纲挈领、画龙点睛等多种思政元素融入的方式展开各个教学环节。

2.1 隐形渗透，引入问题

概率论是研究随机现象数量规律的数学分支。15 世纪末期，瑞士数学家雅各布·伯努利建立了概率论中的第一个极限定理，即伯努利大数定律，并由此发展了多个大数定律。大数定律，顾名思义是指在大量的随机试验中，

试验结果所表现出的统计规律，这种规律在数学上反映为在某种意义下随机试验结果的平均值总是接近于某个确定的值。大数定律在社会生活中的应用非常广泛，从历史上的“抛硬币”试验，到如今大数据时代的云存储方法，无处不体现着大数定律的作用。通过观察发现，一些有规律的随机事件在大量重复出现的条件下，往往呈现几乎必然的统计特性。随后导入相关案例。

案例 1：如果向上抛一枚硬币，硬币落下后哪一面朝上是不可预知的，但当上抛硬币的次数足够多后，达到上万次甚至几十万、几百万次后，就会发现硬币每一面向上的次数约占总次数的二分之一，这个确定性结果背后蕴含着的正是大数定律的本质。

案例 2：人类第一盏有用的电灯是用棉丝作为灯丝的，它足足亮了 45 小时，灯丝才被烧断。其发明者爱迪生在寻找灯丝材料的过程中，试用了 6000 多种材料，试验了 7000 多次，终于成功。爱迪生经过大量次失败后，最后取得了试验的成功，这并非偶然，成功的必然性同样折射出大数定律的内在规律。

案例 3：《中国居民膳食指南科学研究报告（2021）》中提道：近 30 年来，中国经济飞速发展，中国居民营养状况和体格也随之明显改善，儿童青少年生长发育水平持续提高。2021 年中国男性和女性的平均身高分别为 169.7 厘米和 158.0 厘米，比 2002 年分别增加了 2.6 厘米和 2.2 厘米。这些数据的获得运用了抽样统计的方法，而抽样统计的理论基础正是大数定律。

通过上述案例，引导学生思考，并举例说明生活中还有哪些类似的情况。通过讨论、分析，一方面帮助学生对大数定律形成初步的印象，另一方面通过这些例子，体现出实验和抽样的持续性。爱迪生案例，体现了科学实验中的百折不挠、积极探索的科学精神，同时也隐含了一个成功发明背后蕴含的艰辛和挫折，以此为激励学生，正确面对生活中的挫折和失败，形成积极向上的人生观和价值观。同时，利用中国居民平均身高的例子，一方面贴近学生的生活实际，帮助学生了解生活中受大数定律支配的统计抽样方法，同时也展现出随着祖国经济腾飞，人民营养水平提高、身体素质增强的现状，培养学生的爱国主义情怀。后面两个案例都是在真实案例的基础上，隐形渗透

https://doi.org/10.35534/tms.0402006

了思政教育。

2.2 提纲挈领，讲解新知

2.2.1 知识准备阶段

知识准备阶段主要是结合学生的前期知识，找出学生已经具备的知识和新知识之间的联系，发挥桥梁作用，顺利进入新课的学习。大数定律的预备知识主要包括切比雪夫不等式和依概率收敛。

（1）切比雪夫不等式：设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 都存在，则对任意常数 $\varepsilon>0$，有 $P(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant(D(X))/\varepsilon^2$.

（2）依概率收敛：随机变量序列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 依概率收敛于 X 是指 $(\lim\limits_{n\to\infty}P(|X_n-X|\geqslant\varepsilon)=0$，或等价地有 $(\lim\limits_{n\to\infty}P(|X_n-X|<\varepsilon)=1$，记作 $X_n\xrightarrow{P}X$.

通过上述两个准备知识，学生能够明白大数定律的依概率收敛和处处收敛之间的关系，为后面的新知识学习打下基础。

2.2.2 讲解新知

对伯努利大数定律、切比雪夫大数定律和辛钦大数定律进行讲解。在讲解的过程中，结合大数定律的应用对学生进行思想政治教育。

（1）伯努利大数定律

伯努利大数定律是指在 n 重伯努利实验中，在实验次数足够大的条件下，其中某一事件发生的频率可无限接近其发生的概率，因此可用频率近似估计来代替概率。假设 n 次投硬币试验中，正面朝上的次数 μ_n，借助数学软件模拟正面出现的频率 $\frac{\mu_n}{n}$，观察模拟结果。根据模拟的结果可以发现，随着投币次数的增加，正面出现的频率逐渐趋近于 $\frac{1}{2}$。引导学生用数学语言来刻画“逐渐逼近”，从而会联想到数列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{n}=\frac{1}{2}$。

根据学生讨论的情况，引导学生将问题与概率知识结合起来，正面出现的频率 $\frac{\mu_n}{n}$ 与 $\frac{1}{2}$ 无限接近的概率，随着投币次数的增加趋于 1。于是，可以通过依概率收敛进行描述：

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon\right)=1 \text{ 或者 } \lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geqslant\varepsilon\right)=0$$

紧接着提出课堂练习：

在 $P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geqslant\varepsilon\right)$ 中取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geqslant\frac{1}{2}\right)$.

基于课堂练习的结果，进一步分析对于任意的 $\varepsilon>0$，如何计算 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geqslant\varepsilon\right)$.

随后，对伯努利大数定律进行说明和论证，在每次成功率为 p 的伯努利试验序列中，若用 μ_n 表示前 n 次试验中成功的次数，则对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)=0$.

证明：用 X_i 表示第 i 次试验中成功的次数，则 $\mu_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 服从二项分布 $B(n, p)$。因为 $E(\mu_n)=np$，$D(\mu_n)=np(1-p)$，运用切比雪夫不等式可得

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\mu_n}{n}-E\left(\frac{\mu_n}{n}\right)\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant D\left(\frac{\mu_n}{n}\right)/\varepsilon^2=\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}\to 0,$$

进而运用数列收敛的两边夹准则，可得定理 1 成立。

伯努利大数定律表明，当试验在相同条件下重复进行的次数很多时，成功的频率稳定在每次成功概率的附近。例如，新生婴儿是男孩还是女孩在试验之前是无法预知的，但大量观察这个试验，会发现新生男孩的比例逐渐稳定于 1/2。还有，在篮球比赛中某队员的投篮命中率、一台外科手术的成功率、一条流水线产品的合格率等，这些概率我们都无法精确地得到，但是人们可以根据频率，依概率收敛于概率这一内在规律，在一定范围内给出这些概率的估计值。

伯努利大数定律是历史上第一次以严格的形式刻画了频率的稳定性，同时也给了我们用频率去近似概率的理论依据。通过此问题讲解，教师可以结合社会上的一些案例进行分析。对社会存在一些没有上大学但成就较高的事例，教师引导学生得出上大学成才率更高的一般规律，来说明学习伯努利大数定律的重要意义，激发学生的学习热情，端正学风。教师也可以引用名言：“不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海。”教育学生每个人的生活都是一件件小事组成的，只有先做好小事才能完成大事，先养小德才能成就大德。通过中国古代名人名句，培养学生的人文素养，建立正确的人生观和价值观，养成坚持

https://doi.org/10.35534/tms.0402006

不懈、持之以恒的品质。

（2）切比雪夫大数定律

因为该定律的证明过程主要依赖于切比雪夫不等式，因此称之为切比雪夫大数定律。通过基本定义后，对切比雪夫大数定律进行说明，设随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 满足条件：（Ⅰ）相互独立；（Ⅱ）X_i，i=1，2，…的期望和方差都存在；（Ⅲ）方差一致有界，即存在 M>0，使得 $DX_i \leqslant M$，i=1，2，…，则对任意的 ε>0，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

证明：根据切比雪夫不等式可得，当 $n \to \infty$ 时，

$$0 \leqslant P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{D}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} DX_i}{n^2\varepsilon^2} \leqslant \frac{nM}{n^2\varepsilon^2} = \frac{M}{n\varepsilon^2} \to 0$$

再根据数列收敛的两边夹准则，可知结论成立。

切比雪夫大数定律说明，当 n 充分大时，相互独立的随机变量的算术平均值会稳定它的期望值。

随后提出思考：分析切比雪夫大数定律与伯努利大数定律的关联。并要求学生进行相关练习，某随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 满足条件：$P(X_n=-1)=P(X_n=1)=1/2n$，$P(X_n=0)=(n-1)/n$，n=1，2，…，验证 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 满足切比雪夫大数定律。

针对这个问题，教师可以解析生活中赌场经营的高额利润问题，实际上赌场获得的高额利润和设定的游戏规则是分不开的，教师可以采用随机投掷骰子的次数和最后获得对应点数区间的概率问题举例，采用切比雪夫不等式能够得出其概率，赌场就根据概率确定游戏规则，只要赌场获利的概率略高于参与者，那么就是稳赢，这里同时也体现了伯努利大数定律。对于参与者来说，实际上不是输在运气上而是输在规则上，引导学生形成正确的价值观，不能参与赌博等违法行为。

（3）辛钦大数定律

辛钦大数定律的命名是根据著名数学家辛钦的名字而得来的，用于纪念其

在概率论多个领域的开创性工作。在学习该定律之前，需要对同分布的概念加以说明。如果随机变量 X 和 Y 有相同的分布函数，则称 X 和 Y 同分布。当然，如果 X 和 Y 同分布，则 X 和 Y 有相同的概率密度（在连续型情况下）或相同的分布列（在离散型情况下），并且有相同的期望（如果期望存在）和方差（如果方差存在）。同分布这个概念可以推广到任意有限多个甚至可列无穷多个随机变量的情况。前面的伯努利大数定律和切比雪夫大数定律都是以切比雪夫不等式为基础的，所以要求随机变量具有方差，但是方差存在这个条件并不是必要的。在随后学习的独立同分布时的辛钦大数定律中，虽然方差存在的条件被取消了，但是增加了同分布这个新的条件。

教师基于前面的铺垫，进而阐述辛钦大数定律。设随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 满足条件：（I）相互独立；（II）同分布；（III）期望 $EX_i=\mu$ 存在，$i=1, 2, \cdots$；则对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i-\mu\right| \geqslant \varepsilon\right)=0$.

辛钦大数定律表明，当重复对一个随机变量进行大数次观察时，在 n 次观察中的算术平均值会稳定于它的期望值，这就为寻找随机变量的期望值提供了一种思路。在实际生活中，许多案例都以辛钦大数定律作为其理论背景。例如，估计某种袋装食品的质量时，可以随机抽取该产品若干袋，计算出它们的平均质量，那么这个平均质量就是 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$。当选择的袋数足够多时，这个平均质量就可以看作其质量期望值的一个近似。还有，如果要考察某地区中学生的身体发育情况，其主要指标涉及身高和体重，只要随机抽取足够数量的学生，就可以将他们的平均身高和平均体重分别作为该地区中学生身高和体重的期望值。同样，在国民经济中很多统计数据也是以辛钦大数定律为理论支撑。教师引导学生在生活中，学会采用科学的方法获得可靠的数据。

2.3 画龙点睛，课堂小结

通过对大数定律的背景知识和三个大数定律（伯努利大数定律、切比雪夫大数定律和辛钦大数定律）的学习，让学生体会到生活中大数定律无所不在，大数定律以严格的数学形式表达了随机现象最根本的性质之一：平均结果的稳

https://doi.org/10.35534/tms.0402006

定性。其实日常生活中，很多看似不确定的现象，如保险、销售等其实都是可以通过大数定律进行科学解释，得出合适的选择。教师在小结中，引导学生要学会观察身边的学问，让科学融入日常工作之中，将科学知识转换成生产力，提高创新能力和水平。

3 课后延伸

课后延伸是大学生学习的重要环节，教师通过互联网师生互动平台，帮助学生在三种大数定律的基础上，查阅资料寻找大数定律的其他类型，比较各种形式之间的差异及其应用。引导学生搜集大数定律在各领域的应用案例，采用师生互动的方式，在帮助学生运用大数定律的同时，将课程思政也延伸至课外，形成持续的教育机制。

参考文献

[1] 闫莉，闵兰，李为．大学数学基础课程思政的教学设计研究：以概率论与数理统计课程思政为例［J］．西南师范大学学报（自然科学版），2021，46（5）：186–189.

[2] 马昕．《概率论与数理统计》课程思政教学改革的实践与探索［J］．高教学刊，2021（3）：135–138.

[3] 周琴，刘志清．课程思政理念下概率论与数理统计混合式金课建设与实践［J］．信息系统工程，2021（3）：170–171，174.

[4] 刘淑环．知识传授与价值引领—“概率论与数理统计”课程思政的教学探索［J］．中国大学教学，2021（3）：60–65.

Teaching and Practice of Ideological Politics in Higher Mathematics Course
—Based on Teaching of “Law of Large Numbers”

He Guang

School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing

Abstract: The course Ideological and political education puts forward new requirements for higher mathematics teaching. In teaching practice, it is necessary to constantly explore and optimize teaching methods in combination with the requirements of ideological and political education. Taking the content of “law of large numbers” as an example, this paper sets up teaching objectives based on the ideological and political requirements of the course. In teaching, it pays attention to the introduction, explanation of knowledge points, classroom summary and extension after class. To carry out the ideological and political education in teaching, curriculum ideological and political education has been implemented by means of invisible infiltration, concentrating on the main points and adding the finishing touch.

Key words: Higher mathematics; Law of large numbers; Ideological and political education

https://doi.org/10.35534/tms.0402006