

土工固结试验压缩模量 E_s 的 三次样条插值

——基于 p-s 试验数据的 Excel VBA 开发

刘大海^{1,2} 陈永红² 张 萧² 曾庆桂²

1. 深圳市地质局, 深圳;

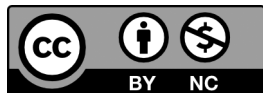
2. 深圳地质建设工程公司, 深圳

摘 要 | 压缩模量 E_s 是土的物理力学指标之一。传统的方法是给出 e-p 曲线图进行人工查取 $[p_1, p_2]$ 及 $[e_1, e_2]$, 然后计算压缩系数 $a_v = -\Delta e / \Delta p$, 再计算压缩模量 $E_{sv} = (1+e_0) / a_v$ 。本文利用实验数据 $(p, \ln(h))$ 建立三次样条函数。在此基础上, 以 Excel VBA 为工具, 编制了 E_s 宏, 实现了在 PC 机上计算任意点的切线压缩模量 E_{st} 及任意区间的割线压缩模量 E_{sv} 。

关键词 | 压缩模量; 切线压缩模量; 割线压缩模量; 三次样条函数; Excel VBA

Copyright © 2022 by author (s) and SciScan Publishing Limited

This article is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



1 开发背景

压缩模量 E_s 是土的物理力学指标之一。

土工试验报告一般只给出各级加载压力区间 $[p_j, p_{j+1}]$ 的压缩模量值 E_{sv} (割线压缩模量)。当需要非加载节点压力区间 $[p_1, p_2]$ 的压缩模量时, 一般

作者简介: 刘大海 (1957-), 教授级高级工程师, 研究方向: 水文地质工程地质。

文章引用: 刘大海, 陈永红, 张萧, 等. 土工固结试验压缩模量 E_s 的三次样条插值——基于 p-s 试验数据的 Excel VBA 开发 [J]. 土木工程进展, 2022, 4 (4): 58-67.

<https://doi.org/10.35534/ace.0404007>

由手工插值获取。即利用土工试验报告给出的 $e-p$ 曲线图进行人工插值, 得到 (p_1, p_2) 点相对应的 (e_1, e_2) , 计算压缩系数 $a_v = -\Delta e / \Delta p$, 然后得到压缩模量 $E_{sv} = (1+e) / a_v$ 。该方法较繁琐, 得到的压缩模量值精度也不高。

目前的技术条件已可对试验数据进行自动化计算处理, 得到压缩模量, 摆脱繁琐的人工图解。

刘大海 (2021) 利用土工固结试验的 $p-s$ 数据建立三次样条函数, 在安卓系统上使用 MFP 语言开发了一款 E_s 计算 App, 实现了在手机上计算插值点的切线压缩模量及压力区间的割线压缩模量 [1, 2]。

为方便在 PC 机上进行数据处理, 建立三次样条函数, 本文以 Excel VBA 为开发工具, 编制了 E_s 宏。直接运行该 E_s 宏, 即可得到插值点的切线压缩模量 E_{st} 及插值区间的割线压缩模量 E_{sv} , 大大提高了岩土工程师及设计人员的计算效率。

2 压缩模量 E_s

土工固结试验 (压缩试验), 是将制成的土样放置在高 2 cm, 面积 30 cm² 或 50 cm² 的钢环刀中, 上下放置透水石, 逐级加载竖向压力进行的压缩试验。试验是单向竖向受压, 侧向完全刚性受限, 无侧向变形 [3, 4]。

压缩模量分压力点的切线压缩模量及压力区间的割线压缩模量。现行国家标准土工试验方法提供的是压力区间的割线压缩模量 [3, 4]。

实际上, 应变分为真实应变与工程应变 [5]。从微应变角度, 真实应变为 $d\varepsilon = ds/h = -dh/h = -d(\ln(h))$, 工程应变为 $d\varepsilon = ds/h_0 = -dh/h_0$ 。

切线压缩模量 E_{st}

切线压缩模量定义为 $p-\varepsilon$ 曲线上某点的压力 p 与竖向应变 ε 的一阶导数:

$$E_{st} = \frac{dp}{d\varepsilon} = -\frac{dp}{dh/h} = -\frac{dp}{d(\ln(h))} \quad (1)$$

真实应变割线压缩模量 E_{sv}

为 $p-\varepsilon$ 曲线上试验区间 $[p_j, p_{j+1}]$ 的压力差 Δp 与相应的竖向真实应变增量 $\Delta\varepsilon$ 之比 [6]:

$$E_{sv} = \frac{\Delta p}{\Delta \varepsilon} = - \frac{\Delta p}{\Delta \ln(h)} \quad (2)$$

工程应变割线压缩模量 E_{sve}

为 $p-\varepsilon$ 曲线上试验区间 $[p_j, p_{j+1}]$ 的压力差 Δp 与相应的竖向工程应变增量 $\Delta \varepsilon$ 之比^[3, 4]:

$$E_{sve} = \frac{\Delta p}{\Delta \varepsilon} = - \frac{\Delta p}{\Delta h/h_0} = - h_0 \cdot \frac{\Delta p}{\Delta h} \quad (3)$$

上式中: $h_0=20$ mm 为初始土样高度, p 为竖向压力, h 为相应 p 时的土样样高, ε 为土样在相应压力 p 时的竖向应变; Δp 为竖向压力差; Δh 为相应压力差时的土样竖向变形增量; $\Delta \varepsilon$ 为相应压力差时的土样应变增量(相对变形增量)。

E_{sve} 与 E_{sv} 的关系

根据式(2)及式(3), 并由积分中值定理, 可导出如下关系:

$$E_{sve} = \frac{h_0}{h_\xi} \cdot E_{sv} \quad (4)$$

其中: h_ξ 为压力区间 $[p_1, p_2]$ 对应的样高区间 $[h_1, h_2]$ 的积分中值点, $h_0/h_\xi > 1$ 。

3 压缩模量 E_s 的三次样条插值

设固结试验数据: $(p_j, x_j) = (p_j, \ln(h_j)) \quad j=0, 1, 2, \dots, n \quad (5)$

设 M_j 为 3 次样条函数在试验数据点(节点)的二阶导数(弯矩), 则在 $[x_j, x_{j+1}]$ 子区间的样条函数为^[7-9]:

$$P_{sj}(x) = \frac{M_{j+1}}{6t_j} \cdot (x-x_j)^3 - \frac{M_j}{6t_j} \cdot (x-x_{j+1})^3 + \left(\frac{P_{j+1}}{t_j} - \frac{h_j \cdot M_{j+1}}{6} \right) \cdot (x-x_j) - \left(\frac{P_j}{t_j} - \frac{h_j \cdot M_j}{6} \right) \cdot (x-x_{j+1}) \quad (j=0, 1, \dots, n-1) \quad (6)$$

在端点(边界), 采用外推型边界, 端点弯矩由最近 2 个节点的弯矩线性外推^[8-10]:

$$\begin{cases} M_0 = M_1 + \frac{M_2 - M_1}{t_1} (x_0 - x_1) = M_1 - \frac{h_0}{t_1} (M_2 - M_1) \\ M_n = M_{n-1} + \frac{M_{n-2} - M_{n-1}}{t_{n-2}} (x_n - x_{n-1}) = M_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{t_{n-2}} (M_{n-1} - M_{n-2}) \end{cases} \quad (7)$$

其中, 向前步长: $t_j = x_{j+1} - x_j$ (8)

$$\text{节点系数: } \begin{cases} \alpha_j = \frac{t_{j-1}}{t_{j-1} + t_j} \\ \beta_j = \frac{t_j}{t_{j-1} + t_j} \\ c_j = 6 \frac{1}{t_{j-1} + t_j} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{t_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{t_{j-1}} \right) \quad j=1, 2, \dots, n-1 \\ \alpha_n = -(\beta_{n-1} + \alpha_{n-1}) \\ \beta_0 = -(\beta_1 + \alpha_1) \\ c_0 = c_n = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{节点弯矩方程组: } \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_0 & \alpha_1 & & & \\ \alpha_1 & 2 & \beta_1 & & & \\ & \alpha_j & 2 & \beta_j & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \alpha_{n-1} & 2 & \beta_{n-1} \\ & & & & \beta_{n-1} & \alpha_n & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_j \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_j \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

弯矩方程组的求解可采用逆矩阵法或 LU 三角矩阵分解法。利用 Excel 工作表函数, 可采用逆矩阵法求解。

弯矩方程组 (10) 求解后就可由式 (6) 得到样条函数 $p_s(x)$, 然后将其近似为压力函数 $p(x)$:

$$p(x) \approx p_s(x) \quad (11)$$

据此, 由式 (1) 一式 (3) 即可得到压力点的切线压缩模量及压力区间的割线压塑模量。

4 E_s 样条插值计算框图

E_s 的样条插值由 1 个主程序及 3 个子程序组成, 详见图 1—图 4。

Es() 主程序, 负责数据输入、子程序的调用及计算结果输出与显示。

Eq() 子程序, 负责节点弯矩方程组的形成。

aXg() 子程序, 负责弯矩方程组的求解 (逆矩阵法)。

Interp() 子程序, 负责计算插值点的函数值, 一阶及二阶导数。

5 计算实例

深圳某勘察场地，土样为海积淤泥，取样深度 5.00 m。该土样进行了 9 级高压固结试验，其试验数据详见表 1，压缩模量 E_s 值见表 2， E_s - p 关系曲线见图 5。

6 E_s 宏

在 Excel 中，使用 E_s 宏计算压缩模量十分简单。只要打开工作表，在工作表中输入 $p-s$ 试验数据及插入点 (p_1, p_2) ，然后直接运行 E_s 宏，即可得到计算结果，详见表 2。

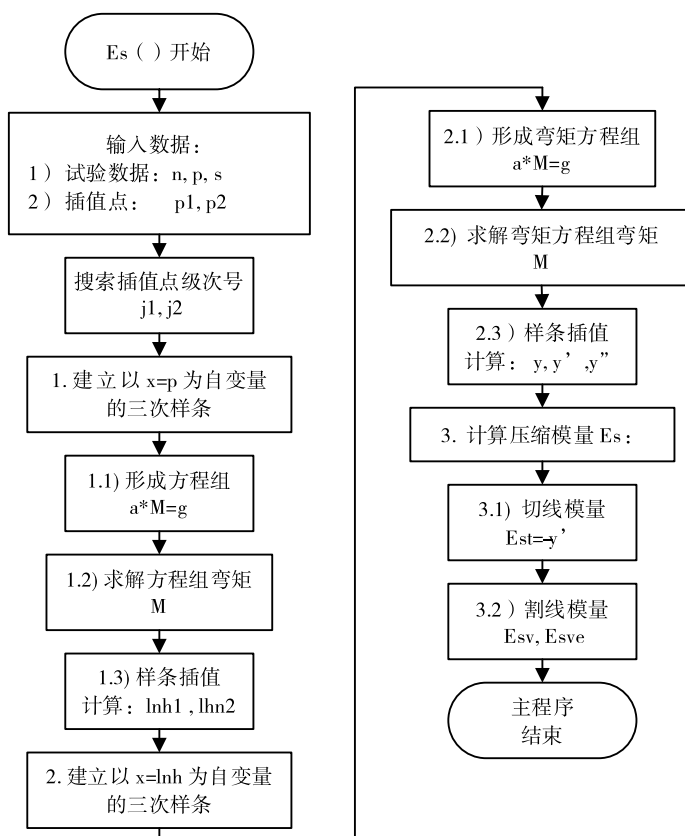


图 1 E_s () 主程序流程图

Figure 1 Flow Chart of E_s () Main Program

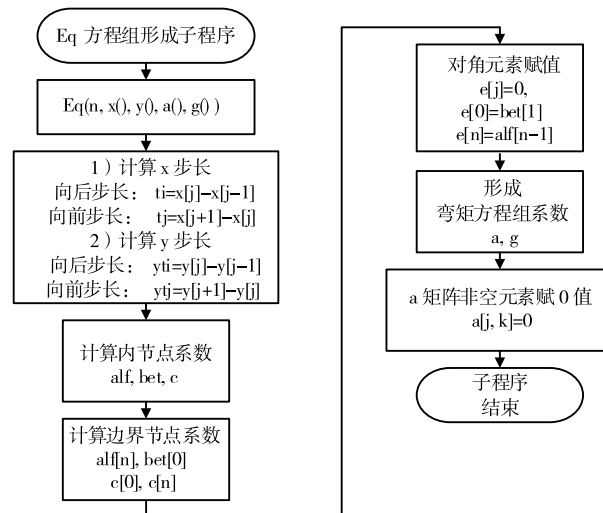


图 2 Eq () 方程组子程序流程图

Figure 2 Flow Chart of Eq () Equation Set Subprogram

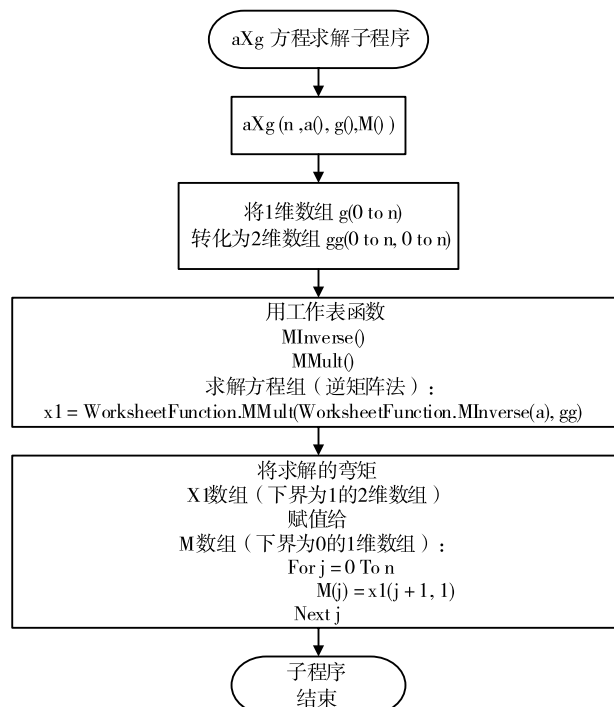


图 3 aXg () 方程组求解子程序流程图

Figure 3 Flow Chart of aXg () Equations Solving Subprogram

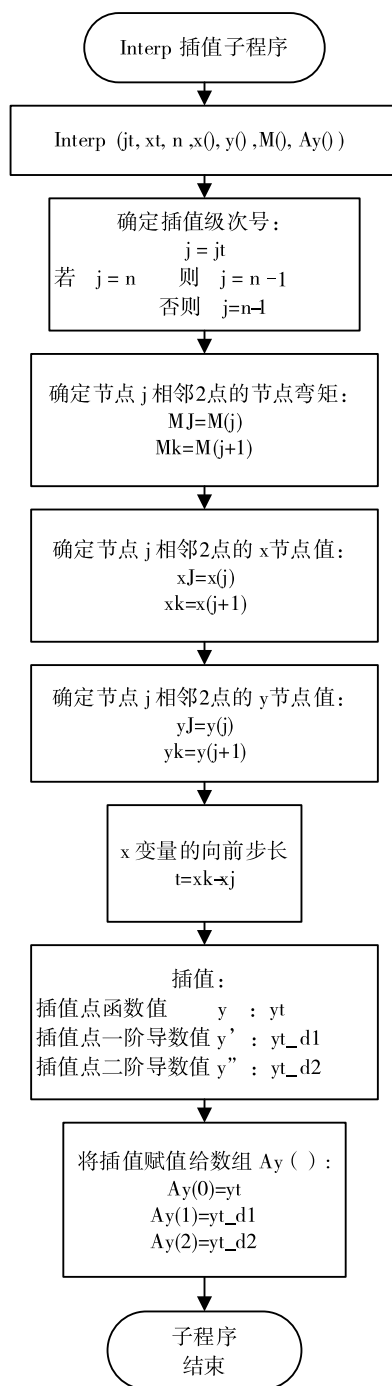


图 4 插值子程序流程图

Figure 4 Interpolation subprogram flow chart

表 1 土工固结试验实测数据表

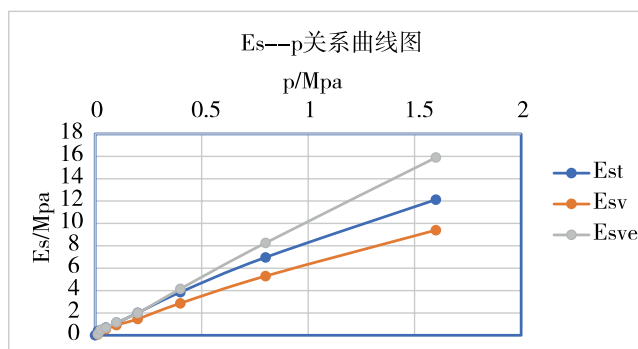
Table 1 Measured data of geotechnical consolidation

类型	p--s 原始数据			中间量		三次样条 插值	割线模量	
	试验级次 No	级次压力 p/Mpa	变形 s/ mm	样高 h/ mm	对数样高 lnh	切线模量 Est/Mpa	真实应变 压缩模量 Esv/Mpa	工程应变 压缩模量 Esve/Mpa
试验点	0	0	0.0000					
	1	0.0125	2.5860					
	2	0.025	3.1020					
	3	0.05	3.8510					
	4	0.1	4.7140					
	5	0.2	5.7220					
	6	0.4	6.6860					
	7	0.8	7.6550					
	8	1.6	8.6620					
插值点		0.35						
		0.65						

表 2 土工固结试验压缩模量计算结果表

Table 2 Calculation results of compression modulus of geotechnical consolidation test

类型	p--s 原始数据			中间量		三次样条 插值	割线模量	
	试验级次 No	级次压力 p/Mpa	变形 s/ mm	样高 h/ mm	对数样高 lnh	切线模量 Est/Mpa	真实应变 压缩模量 Esv/Mpa	工程应变 压缩模量 Esve/Mpa
试验点	0	0	0.0000	20.0000	2.9957	0.000		
	1	0.0125	2.5860	17.4140	2.8573	0.37	0.09	0.10
	2	0.025	3.1020	16.8980	2.8272	0.45	0.42	0.48
	3	0.05	3.8510	16.1490	2.7819	0.70	0.55	0.67
	4	0.1	4.7140	15.2860	2.7269	1.10	0.91	1.16
	5	0.2	5.7220	14.2780	2.6587	2.00	1.47	1.98
	6	0.4	6.6860	13.3140	2.5888	3.85	2.86	4.15
	7	0.8	7.6550	12.3450	2.5133	6.97	5.29	8.26
	8	1.6	8.6620	11.3380	2.4282	12.13	9.40	15.89
插值点	5	0.35	6.5256	13.4744	2.6008	3.48		
	6	0.65	7.3437	12.6563	2.5382	5.79	4.79	7.33

图 5 E_s - p 关系曲线图Figure 5 E_s - p Relation Curve

7 结论与建议

由式(4)及图5可见,工程应变的区间割线模量大于真实应变的区间割线模量。对于软土,高压大变形时的工程应变割线压缩模量远大于真实应变割线压缩模量。

工程应变的割线压缩模量仅适用于小变形,将其应用于高压大变形时存在安全隐患,对软土尤为如此。

现行国家标准土工试验方法采用的是由工程应变确定的割线压缩模量 E_{sve} 。建议标准修订时,采用真实应变确定的割线压缩模量 E_{sv} 。

参考文献

- [1] 刘大海. 任意压力区间压缩模量 E_s 计算 App [J]. 土木工程进展, 2021, 3(4).
- [2] 刘大海. 任意压力区间压缩模量 E_s 计算 App [M] // 刘大海论文集. 新加坡: 伊诺科学出版社, 2021: 317-323.
- [3] 土工试验方法标准 (GB/T 50123-1999) [S]. 1999: 83-93.
- [4] 土工试验方法标准 (GB/T 50123-2019) [S]. 2019: 85-95.
- [5] 薛守义. 弹塑性力学 [M]. 北京: 中国建材出版社, 2005.
- [6] 刘大海. 割线压缩模量 E_{sv} 规范公式之商榷 [J]. 岩土工程界, 2007, 10(9).

- [7] 丁丽娟, 程记元. 数值计算方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [8] 刘大海. 三次样条插值三弯矩法 [J]. 应用数学资讯, 2021, 3 (4).
- [9] 刘大海. 三次样条插值三弯矩法 [M] //刘大海论文集. 新加坡: 伊诺科学出版社, 2021: 359–369.
- [10] Mathews J H, Fink K D. 数值方法 (Matlab版) (第四版) [M]. 北京: 电子工业出版社, 2012.

The Cubic Spline Interpolation of Compression Modulus E_s of Geotechnical Consolidation Test —Excel VBA Development Based on p-s Test Data

Liu Dahai^{1,2} Chen Yonghong² Zhang Xiao² Zeng Qinggui²

1. Shenzhen Geological Bureau, Shenzhen;

2. Shenzhen Geological Construction Engineering Company, Shenzhen

Abstract: Compression modulus E_s is one of the physical and mechanical indexes of soil. The traditional method is to give the curve $e-p$ for manual search $[p_1, p_2]$ and $[e_1, e_2]$, then calculate the compression coefficient $a_v = -\Delta e / \Delta p$, and then calculate the compression modulus $E_{sv} = (1+e_0) / a_v$. In this paper, cubic spline function is established by using experimental data $(p, \ln(h))$. On this basis, using Excel VBA as a tool, an Es macro is compiled to calculate the tangent compression modulus E_s of any point and secant compression modulus E_{sv} of any interval on a PC.

Key words: Compression modulus; Tangent compression modulus; Secant compression modulus; Cubic spline function; Excel VBA