

深圳市 3 套平面直角坐标系的相互转换

——基于 Excel 多元回归分析的正形变换

刘大海^{1,2} 陈永红² 张 萧² 曾庆桂²

1. 深圳市地质局, 深圳;

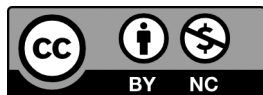
2. 深圳地质建设工程公司, 深圳

摘要 | 在全面启用 CGCS2000 坐标系后, 工程上常常需要对深圳市独立坐标、BJ54 坐标、CGCS2000 坐标进行相互转换。坐标变换分间接法及直接法。正形变换是直接法之一, 它具有等角变换的优点, 可通用于同球及异球的高斯投影平面直角坐标变换。本文选用了深圳市 67 个二等 GPS 重合点, 对正形变换的参数求解采用了简易的 Excel 多元线性回归方法。方法简单实用, 计算快捷, 转换精度高。

关键词 | 深圳独立坐标; CGCS2000 坐标; BJ54 坐标; 回归分析; Excel

Copyright © 2022 by author (s) and SciScan Publishing Limited

This article is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/). <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



我国自 2008 年 7 月 1 日开始启用 CGCS2000 坐标系, 过渡期 8 ~ 10 年^[1]。深圳市自全面启用 CGCS2000 后, 工作中常常需要对深圳市独立坐标 (简记: sz)、3° 带 BJ54 坐标 (BJ54-3.38, 简记: BJ54)、3° 带 CGCS2000 坐标 (CGCS2000-3.38, 简记: CGCS2000) 进行相互转换^[2]。

BJ54 坐标系采用的是 1940 克拉索夫斯基椭球, sz 坐标系是 BJ54 坐标系经

作者简介: 刘大海 (1957-), 男, 江西大余人, 教授级高级工程师, 水文地质工程地质专业, 主要从事岩土工程及勘测工作。

文章引用: 刘大海. 深圳市 3 套平面直角坐标系的相互转换——基于 Excel 多元回归分析的正形变换 [J]. 测绘观察, 2022, 4 (4): 1-9.

<https://doi.org/10.35534/go.0404001>

平移及小角度旋转而成；CGCS2000 坐标系采用的则是 CGCS2000 椭球。实际上，sz 与 BJ54 为同球坐标变换，而 sz、BJ54 与 CGCS2000 的变换则是异球坐标变换。

上述 3 套坐标系，均为高斯投影平面直角坐标系。

正形变换^[3]是坐标变换的直接法之一，本质上属多项式变换，满足高斯投影的等角变换条件，可通用于同球及异球的高斯投影平面直角坐标变换。因此，sz、BJ54、CGCS2000 等 3 套坐标系之间的相互转换，均可采用正形变换。

正形变换，我国学者杨启和^[3-5]、吕晓华^[6]、马俊^[7]等进行了比较深入的研究；张佃友^[8]用 VC 语言编程对北京 54 坐标与西安 80 坐标进行了 10 参数的正形变换；覃辉^[9]对正形变换用可编程计算器求解最小二乘法正规方程组；易衡^[10]利用 Excel 的 VBA 编程，进行了相似变换及正形变换 6 参数的解算；刘博涛^[11]用 MATLAB 工具研究了石家庄 CGCS2000 与独立坐标系的布尔沙 7 参数变换模型；李东^[12]、郭喜春^[13]、陈永立^[14]研究了 CGCS2000 与独立坐标系二维 4 参数、7 参数模型的坐标转换问题；黎彬^[15]探讨了基于 CGCS2000 的珠海独立坐标系与其它坐标系变换的平面 4 参数及二维多项式模型的转换；刘大海^[16]探讨了使用 Excel 多元线性回归分析进行正形变换。

本文选用了深圳市 67 个二等 GPS 重合点，以正形变换理论，采用 Excel 多元线性回归分析方法求解了 3 套坐标系之间的正形变换参数。在此基础上，可利用 Excel 进行快速的批量坐标变换。

1 正形变换

在复平面上，设旧坐标 $x+i \cdot y$ 与新坐标 $x_n+i \cdot y_n$ 为：

$$\text{设: } \begin{cases} z=x+i \cdot y \\ w=x_n+i \cdot y_n \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{则坐标变换: } x_n+i \cdot y_n=f(x+i \cdot y) \quad (2-1)$$

$$\text{或: } w=f(z) \quad (2-2)$$

上述变换要满足正形变换（等角变换）的充要条件是：

$$\frac{\partial x_n}{\partial x} = \frac{\partial y_n}{\partial y}, \quad \frac{\partial x_n}{\partial y} = -\frac{\partial y_n}{\partial x} \quad (3)$$

对函数 $f(z)$ 在 z_0 展开为 Taylor 级数, 则有:

$$\begin{cases} w=f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}\cdot\Delta z+\frac{f''(z_0)}{2!}\cdot\Delta z^2+\cdots+\frac{f^m(z_0)}{m!}\cdot\Delta z^m+\varepsilon \\ f(z_0)=p_0+i\cdot q_0=x_{n0}+i\cdot y_{n0} \\ \frac{f^m(z_0)}{m!}=p_m+i\cdot q_m \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} w &= x_n + i \cdot y_n \\ &= x_{n0} + i \cdot y_{n0} \\ &\quad + (p_1 + i \cdot q_1) (\Delta x + i \cdot \Delta y) + (p_2 + i \cdot q_2) \cdot (\Delta x + i \cdot \Delta y)^2 + \cdots \\ &\quad + (p_m + i \cdot q_m) \cdot (\Delta x + i \cdot \Delta y)^m \end{aligned} \quad (5)$$

由于坐标值较大, 为避免高次幂的运算误差, 取自变量展开点 z_0 为公共点的平均坐标值:

$$\begin{cases} x_0 = x_{mean} \\ y_0 = y_{mean} \\ \Delta x = x - x_0 \\ \Delta y = y - y_0 \end{cases} \quad (6-1)$$

$$\text{令: } \begin{cases} a_1 = \Delta x \\ a_2 = \Delta x^2 - \Delta y^2 \\ a_3 = \Delta x^3 - 3 \Delta x \Delta y^2 = \Delta x (\Delta x^2 - 3 \Delta y^2) \\ a_4 = \Delta x^4 + \Delta y^4 - 6 \Delta x^2 \Delta y^2 = (\Delta x^2 - \Delta y^2)^2 - 4 \Delta x^2 \Delta y^2 \end{cases} \quad (6-2)$$

$$\begin{cases} b_1 = \Delta y \\ b_2 = 2 \Delta x \Delta y \\ b_3 = 3 \Delta x^2 \Delta y - \Delta y^3 = \Delta y (3 \Delta x^2 - \Delta y^2) \\ b_4 = 4 \Delta x^3 \Delta y - 4 \Delta x \Delta y^3 = 4 \Delta x \Delta y (\Delta x^2 - \Delta y^2) \end{cases} \quad (6-3)$$

则正形变换 (4 次幂 10 参数) 的复数表达式为^[16]:

$$\begin{aligned} w &= x_n + i \cdot y_n \\ &= [x_{n0} + (a_1 \cdot p_1 - b_1 \cdot q_1) + (a_2 \cdot p_2 - b_2 \cdot q_2) + (a_3 \cdot p_3 - b_3 \cdot q_3) \\ &\quad + (a_4 \cdot p_4 - b_4 \cdot q_4)] + i \cdot [y_{n0} + (a_1 \cdot q_1 + b_1 \cdot p_1) + (a_2 \cdot q_2 + b_2 \cdot p_2) \\ &\quad + (a_3 \cdot q_3 + b_3 \cdot p_3) + (a_4 \cdot q_4 + b_4 \cdot p_4)] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{即有: } \begin{cases} x_n = x_{n0} + a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3 + a_4 \cdot p_4 - b_1 \cdot q_1 - b_2 \cdot q_2 - b_3 \cdot q_3 - b_4 \cdot q_4 \\ y_n = y_{n0} + a_1 \cdot q_1 + a_2 \cdot q_2 + a_3 \cdot q_3 + a_4 \cdot q_4 + b_1 \cdot p_1 + b_2 \cdot p_2 + b_3 \cdot p_3 + b_4 \cdot p_4 \end{cases} \quad (8)$$

令:

$$Z_n = \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n1} & x_{n1} & \cdots & x_{nm} & y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nm} \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

$$\beta = [x_{n0} \ y_{n0} \ p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T \quad (10)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & -b_{11} & -b_{21} & -b_{31} & -b_{41} \\ 1 & 0 & a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & -b_{12} & -b_{22} & -b_{32} & -b_{42} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & a_{4n} & -b_{1n} & -b_{2n} & -b_{3n} & -b_{4n} \\ 0 & 1 & b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ 0 & 1 & b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} & a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & b_{4n} & a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & a_{4n} \end{bmatrix} \quad (11-1)$$

$$\text{记: } M = [A_0 \ B_0 \ A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4] \quad (11-2)$$

$$\text{则正形变换简记为: } Z_n = M \cdot \beta \quad (12)$$

2 正形变换参数 β 解算

正形变换式 (12) 可以看做是关于参数 β 的多元变量的线性方程组。因此，可以十分方便的采用 Excel 多元线性回归法求解参数 β 。

3 正形变换参数与相似变换参数的互换关系

坐标系旋转角 α (测量坐标系左手规则)

$$\alpha = \theta - \theta_n$$

$$= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \arctan\left(\frac{y_n - y_{n0}}{x_n - x_{n0}}\right)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \arctan\left[\frac{(a_1 \cdot q_1 + b_1 \cdot p_1) + (a_2 \cdot q_2 + b_2 \cdot p_2) + \dots + (a_4 \cdot q_4 + b_4 \cdot p_4)}{(a_1 \cdot p_1 - b_1 \cdot q_1) + (a_2 \cdot p_2 - b_2 \cdot q_2) + \dots + (a_4 \cdot p_4 - b_4 \cdot q_4)}\right]$$

由于坐标系旋转角与坐标点的位置无关，为简单计算，取： $x_0=0$, $y_0=0$, $x=1$, $y=0$,

$$\text{则由式 (6) 得到: } \begin{cases} a_1=1 \\ a_2=1 \\ a_3=1 \\ a_4=1 \end{cases} \begin{cases} b_1=0 \\ b_2=0 \\ b_3=0 \\ b_4=0 \end{cases}$$

从而有：

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}\right) \approx -\arctan(q_1/p_1) \quad (13)$$

缩放因子 k

$$k=p_1/\cos \alpha=-q_1/\sin \alpha \tag{14}$$

当正形变换取幂次为 1 时，正形变换退化为等价的相似变换：

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n0} \\ y_{n0} \end{bmatrix} + k \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{15}$$

4 坐标变换

4.1 重合点坐标

选用深圳市东西南北大体均匀分布的 67 个二等 GPS 点作为重合点，其坐标详见表 1。

表 1 公共点坐标表（单位：m）

Table 1 Coordinates of common points (Unit: m)

公共点 序号	sz 坐标系		BJ54-3.38 坐标系		CGCS2000-3.38 坐标系	
	x	y	x	y	x	y
1	21***.951	117***.229	2496***.820	508***.617	2496***.872	508***.248
2	14***.722	99***.090	2489***.549	489***.816	2489***.923	489***.182
.....						
67	25***.014	117***.073	2500***.124	508***.195	2500***.202	508***.907

4.2 多元回归分析数据矩阵

由公式（6），在 Excel 工作表中按表 2 格式准备数据。相同公式的单元格，使用下拉输入与计算更为方便快捷。

表 2 Excel 多元线性回归分析矩阵表

Table 2 Excel multiple linear regression analysis matrix

Z_n	A_0	B_0	A_1	A_2	A_3	A_4	B_1	B_2	B_3	B_4
x_{n1}	1	0	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{41}	$-b_{11}$	$-b_{21}$	$-b_{31}$	$-b_{41}$
x_{n2}	1	0	a_{12}	a_{22}	a_{32}	a_{42}	$-b_{12}$	$-b_{22}$	$-b_{32}$	$-b_{42}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{nn}	1	0	a_{1n}	a_{2n}	a_{3n}	a_{4n}	$-b_{1n}$	$-b_{2n}$	$-b_{3n}$	$-b_{4n}$
y_{n1}	0	1	b_{11}	b_{21}	b_{31}	b_{41}	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{41}
y_{n2}	0	1	b_{12}	b_{22}	b_{32}	b_{42}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	a_{42}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
y_{nn}	0	1	b_{1n}	b_{2n}	b_{3n}	b_{4n}	a_{1n}	a_{2n}	a_{3n}	a_{4n}

4.3 坐标变换参数及变换精度

Excel 工作表准备好数据后, 在进行回归分析时, 对 y 值输入区域栏, 选择 Z_n 列数据; 对 x 值输入区域栏, 选择 A_0-B_4 列数据; 同时, 需勾选常数为 0 选项。

随后, 点击确定按钮, 在新工作表中将显示多元线性回归结果表, 其回归系数就是正形变换参数 β 。

得到正形变换参数后, 即可在 Excel 表中进行快速的批量坐标变换。比较变换值 (x_n, y_n) 与原坐标值 (x, y) , 即可得到变换误差 (详见表 3), 其最大转换误差 $<2\text{ mm}$, 转换精度高。

表 3 坐标转换参数及转换误差表

Table 3 Table of coordinate conversion parameters and conversion errors

项目	参数	SZ<-->BJ54		SZ<-->CGCS2000		BJ54<-->CGCS2000	
		SZ->BJ54	BJ54->SZ	SZ->CGCS2000	CGCS2000->SZ	BJ54->CGCS2000	CGCS2000->BJ54
展开点	x_0	33***.9506	2507***.7361	33***.9506	2507***.7082	2507***.7361	2507***.7082
	y_0	125***.5161	515***.1634	125***.5161	515***.0691	515***.1634	515***.0691
坐标 转换 参数	x_{n0}	2507***.7361	33***.9506	2507***.7081	33***.9507	2507***.7081	2507***.7362
	y_{n0}	515***.1633	125***.5161	515***.0691	125***.5161	515***.0691	515***.1633
	p_1	0.*****206	0.*****059	0.*****879	0.*****073	1.*****330	0.*****670
	p_2	-2.71188E-14	2.52032E-14	-1.728160E-13	1.687527E-13	-1.44304E-13	1.44308E-13
	p_3	7.8407E-18	-7.51992E-18	-3.284485E-18	3.324595E-18	-1.09195E-17	1.09196E-17
	p_4	1.02187E-23	-7.58262E-24	-1.173228E-22	1.128135E-22	-1.21893E-22	1.21899E-22
	q_1	-0.*****454	0.*****759	-0.*****489	0.*****578	0.*****076	-0.*****076
	q_2	-3.67137E-14	3.80554E-14	-7.508390E-14	8.382638E-14	-4.33236E-14	4.33126E-14
	q_3	4.43483E-18	-4.95994E-18	6.997177E-19	-4.741382E-19	-4.30034E-18	4.29935E-18
	q_4	3.04726E-23	-3.12347E-23	-4.794712E-23	5.776855E-23	-8.69481E-23	8.69318E-23
坐标 转换 误差	min (x, y)	0.00000	0.00000	0.00002	0.00001	0.00002	0.00002
	max (x, y)	0.00137	0.00137	0.00055	0.00054	0.00163	0.00163
	mean(x, y)	0.00044	0.00044	0.00024	0.00024	0.00051	0.00051

5 结语

自全面启用 CGCS2000 后, 工作中常常需要对深圳市独立坐标、3° 带 BJ54 坐标、3° 带坐标 CGCS2000 坐标进行相互转换。使用 Excel 工具、选用深圳市 67 个二等 GPS 重合点, 采用多元线性回归方法, 求解了 3 套坐标系之间的转换

参数。方法简单快捷,最大转换误差 <2 mm,转换精度高。

在获取坐标转换参数的基础上,可利用 Excel 下拉计算快速进行批量坐标变换。

参考文献

- [1] 陈鹏飞,成英燕,文涵江,等. 2000国家大地坐标系实用宝典 [M]. 北京:测绘出版社,2008:3-4.
- [2] 陈鹏飞,成英燕,秘金钟,等. 2000国家大地坐标系建立的理论与方法 [M]. 北京:测绘出版社,2014:31-33.
- [3] 杨启和. 地图投影变换原理与方法 [M]. 北京:解放军出版社,1990,29-31.
- [4] 杨启和. 等角投影数值变换的研究 [J]. 测绘学报,1982,11(4):268-282.
- [5] 杨启和. 等角投影变换的正形变换多项式及其应用的研究 [J]. 地图,1990(4):13-16.
- [6] 吕晓华. 地图投影数值变换方法综合评述 [J]. 测绘学院学报,2002,19(2):150-153.
- [7] 马俊,蔚伯虎. 等角投影数值变换的正形多项式方法及其应用分析 [J]. 北京测绘,2002(4):32-34.
- [8] 张佃友,覃辉. 正形变换实现北京54坐标与西安80坐标之间的转换 [J]. 城市勘测,2007(6):86-87.
- [9] 覃辉. 控制网平差与测绘工程 [M]. 上海:同济大学出版社,2021:55-64.
- [10] 易衡,郑茂仪. 利用Excel实现坐标转换功能 [J]. 科技视界,2015(23):203-204.
- [11] 刘博涛,袁凌云,李杰. 基于CGCS2000的独立坐标系建立与应用 [J]. 城市勘察,2016(3):118-120.

- [12] 李东, 毛之琳, 等. CGCS2000与独立坐标系转换模型适用性研究 [J]. 测绘工程, 2015, 24 (1): 1-5.
- [13] 郭喜春, 李东. 基于CGCS2000建立城市相对独立坐标系统的方法 [J]. 测绘通报, 2012 (10): 5-15.
- [14] 陈永立, 李新法, 马会林. 与CGCS2000相联系的独立坐标系建立方法研究 [J]. 测绘通报, 2013 (9): 43-50.
- [15] 黎彬, 黄校, 李秀龙. 基于CGCS2000建立珠海市城市相对独立坐标系的探讨 [J]. 城市勘测, 2014 (1): 117-120.
- [16] 刘大海. 平面直角坐标正形变换简易解算方法 [J]. 测绘观察, 2021, 3 (4): 187-198.

Mutual Transformation of Three Plane Rectangular Coordinate Systems in Shenzhen —Orthomorphic Transformation Based on Excel Multiple Regression Analysis

Liu Dahai^{1,2} Chen Yonghong² Zhang Xiao² Zeng Qinggui²

1. Shenzhen Geological Bureau, Shenzhen;

2. Shenzhen Geological Construction Engineering Company, Shenzhen

Abstract: After the CGCS2000 coordinate system is fully used, it is often necessary to convert Shenzhen independent coordinates, BJ54 coordinates and CGCS2000 coordinates to each other in engineering. Coordinate transformation includes indirect method and direct method. Conformal

transformation is one of the direct methods. It has the advantages of isometric transformation and can be used in the transformation of Gaussian projection plane rectangular coordinates of the same sphere and different spheres. In this paper, 67 second order GPS coincidence points in Shenzhen are selected, and a simple Excel multiple linear regression method is used to solve the parameters of orthomorphic transformation. The method is simple and practical, with fast calculation and high conversion accuracy.

Key words: Shenzhen independent coordinate; CGCS2000 coordinate; BJ54 coordinate; Regression analysis; Excel