教育研讨
2023 年 8 月第 5 卷第 3 期

“导数概念”的分层教学法

李高西　任　艺

重庆工商大学数学与统计学院，重庆

摘　要 | 在大学数学教学中应用分层教学法能够改进传统的讲授式教学方式，从而促进学生个性化发展，提高学习效率。本文首先讨论了在大学数学教学中应用分层教学的重要性，然后设计分层教学法，分别为学生分层、目标分层、施教分层和作业分层。最后以大学数学中“导数概念”一课为例进行分层教学案例设计。

关键词 | 导数概念；分层教学法；案例设计

1　在数学教学中应用分层教学的重要性

大学数学是高等教育中一门基础学科，同时对于理工科学生来说，数学也具有十分重要的地位。然而，当前大学数学教育尚存在一些问题。例如，在教学方式上普遍采用讲授式教学，虽然这种方式具有高效率的优点，能够让学生在短时间内掌握大量知识，但在这个过程中，教师为了完成教学任务，会出现无法兼顾全体学生的问题，导致学生在学习过程中处于被动状态，缺少学习的积极性、主动性，进而使得课堂索然无味[1]。

分层教学法实际上以因材施教教学原则为基础，考虑学生在智力和学习能力等方面上的个体差异性。采用分层教学能够改进传统的教学模式，促进学生个性化发展，激发学生学习兴趣，提高学习效率。因此，这种新型的教学方式——分层教学法，在大学数学教育教学中具有重要意义。

2　分层教学法的设计

2.1　学生分层

教师在教学过程中处于组织者的地位，主要任务是引导学生去发现问题、思考问题、解决问题，让

作者简介：李高西，副教授，研究方向：数学教育。

文章引用：李高西，任艺．“导数概念”的分层教学法［J］．教育研讨，2023，5（3）：408-414.
https://doi.org/10.35534/es.0503058

学生成为课堂的主人。运用分层教学法，教师首先可以通过调查访问法并结合学生平时的课堂表现、学科综合成绩等方面对学生进行科学分层。根据学生不同的特点将其分为 A、B、C 三层，确保相同群体学生的学习能力接近。A 层学生能高效完成教师布置的任务，成绩优异，具有较强的学习能力；B 层学生具备扎实的学习基础，但缺乏创新能力，与 A 层学生相比存在一定的学习差距；C 层学生则是指基础薄弱，无法独立完成难度相对较高的学习任务，需要依靠教师或 A、B 层学生的帮助[2]。

2.2 目标分层

教学目标主要包含三个方面：（1）知识与技能目标；（2）方法与过程目标；（3）情感态度与价值观目标。这些目标不是各自独立，而是交互影响，融会贯通。在学生分层的基础上，教师对不同层级的学生也要制定相应的教学目标，其中 A 层学生要同时达到 B、C 层学生的教学目标；B 层学生要同时达到 C 层学生的教学目标[3]。

（1）知识与技能目标

①了解或知道知识点是什么（A、B、C 层）

②理解知识点是如何推导出来的（A、B 层）

③清楚知识点之间的关系，学会应用（A 层）

（2）方法与过程目标

①通过观察、猜想、归纳、讨论等活动，提高学生分析问题的能力、运用所学知识解决实际问题的能力等（A、B、C 层）

②提高合作能力，在共同学习的路上尝试自主思考问题（A、B 层）

③发挥核心领导能力，带领小组同学探究问题解决的方向（A 层）

（3）情感态度与价值观目标

①体验成功的乐趣，锻炼克服困难的意志，建立自信（A、B、C 层）

②积极参与数学活动，对数学有好奇心和求知欲（A、B 层）

③了解数学的价值，形成坚持真理、严谨求实的科学态度（A 层）

2.3 施教分层

在进行施教分层的过程中，首先，针对不同层次的学生，教师应设计恰当的问题，做到分类指导。课前引入时，教师可以设计难度较低、更容易理解的教学内容，让所有学生（A、B、C 层）都参与课堂活动中。讲授新课时，教师设计合适的问题引导学生思考，并尝试让 B 层学生总结所学数学知识的一般规律、C 层学生拓展解决问题的思路。其次，教师应鼓励不同层次学生之间合作学习，以先进带后进，缩小学生之间的差距，促进共同进步，同时，培养学生的集体荣誉感，强化学生的团队合作能力。综上，分层提问、分层设题、分组展开合作交流学习等都是进行施教分层的方法[4]。

2.4 作业分层

在课后布置分层作业，一方面教师能检测出各层学生对不同知识点的掌握程度，及时进行针对性的

引导纠正，并对掌握程度不够理想的学生给予帮助，逐步缩小不同层级学生之间的差距。另一方面教师也能更好地根据当前学生的情况安排接下来的教学任务。该环节主要将作业分为必做题和选做题，其中必做题主要分为两部分：一部分要求全体学生独立完成；另一部分提高难度，要求 A、B 层同学完成（C 层同学可加入讨论）。选做题则是一些具有拓展性的探究题，设置为 A 层同学的作业（A 层同学可提供思路，带领 B、C 层同学一起解决问题）。

3　分层教学法在“导数概念”中的教学设计

3.1　内容与内容解析

本课时内容选自大学数学系列教材《微积分》第三章“导数与微分”中第一节“导数的概念”。导数在数学中是一个重要的概念，在自然科学和社会科学领域中被广泛应用，是微积分的重要组成部分。本课时主要介绍导数的定义、物理意义、几何意义、可导的充分必要条件、可导和连续的关系。

3.2　目标与目标解析

3.2.1　教学目标

（1）知识与技能目标

①明白导数以及导函数的概念（A、B、C 层）

②理解导数的几何意义；理解可导的充分必要条件（A、B 层）

③掌握可导与连续的关系（A 层）

（2）过程与方法目标

①通过引入具体问题，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，直观感受变量变化的情况，发展学生观察、类比、概括的数学能力（A、B、C 层）

②小组合作探索求平面曲线的切线斜率问题，由割线引申到切线，体会数形结合的思想方法。通过观看多媒体，直观感受“逼近”的极限思想（A、B 层）

③发挥核心领导能力，带领小组同学运用已有的数学知识探索连续与可导之间的关系，提升学生的逻辑推理能力（A 层）

（3）情感态度与价值观

①在整个学习过程中，感受数学与其他学科之间的联系，体会数学的应用价值和科学价值，激发学习数学的乐趣，增强学习数学的信心（A、B、C 层）

②积极参与数学课堂活动，加入小组合作探究（A、B 层）

③引导小组其他同学积极思考，带领同学提高发现问题、分析问题、解决问题的能力（A 层）

3.2.2　目标分析

达成上述目标的标志是：A、B、C 层同学能够用定义求函数在某一点处的导数，以及熟悉应用导数定义的数学表达式的各种变体；A、B 层同学会求曲线的切线；快速反应出可导的充分必要条件；A 层同学能够证明某个函数的连续性和可导性，并能根据连续可导的关系解决相关问题。

3.3 教学问题诊断分析

学生在高中时期已经学过了导数的相关概念，无论是在高中数学还是高等数学中，导数都具有非常重要的地位，但各个时期的侧重点又有所不同。例如，高中学习导数，要求更多偏向于通过背诵公式求导数以及曲线在某点处的切线，侧重点在于解决实际问题；而高等数学从极限的角度来定义导数，较难理解，侧重点在于计算。所以这种跨度对学生而言是一个很大的困难。

3.4 教学过程

为完成教学任务，本节课设计了四个环节，如图 1 所示。

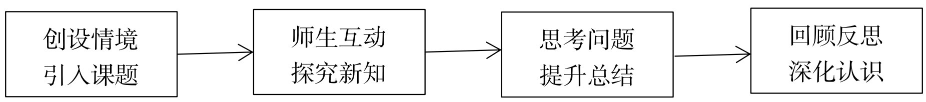

图 1 教学环节

Figure 1 Teaching steps

3.4.1 创设情境、引入课题

问题 1：某运动员高台跳水，他相对水面的高度 h 与起跳后的时间 t 之间的函数方程为 $h=f(t)$，求在时刻 t_0 那一瞬间的运动速度。

师生活动：引导学生区分平均速度和瞬时速度，在物理学科中，对于一个具体的函数 $h=f(t)$，我们可以套用公式计算瞬时速度，那么从数学的角度出发，该如何计算呢？平均速度是如何转变到瞬时速度的？

设计意图：高台跳水问题，从一个物理问题出发导入新课，让全体学生（A、B、C 层学生）感受数学和其他学科之间的关联，感受数学来源于生活并应用于生活，并能够很好地理解导数的物理意义。同时通过区分平均速度和瞬时速度，为后续引出导数做铺垫，体会导数的本质就是瞬时变化率。

问题 2：求曲线切线的斜率，设曲线方程为 $y=f(x)$，求在点 $M(X_0, Y_0)$ 处的切线斜率。

师生活动：由教师引导学生从割线出发，求切线，点 N 是曲线上任一点，点 M 处的切线就是割线 MN 当 N 沿曲线无限接近点 M 时的极限位置。探索割线是如何过渡到切线的？引导 C 层学生作出切线斜率的表达式，随后鼓励 B 层学生思考导数的几何意义。

设计意图：从几何问题出发，引导学生用无限逼近的思想，体会切线是割线的逼近位置，切线斜率是割线斜率的逼近。

3.4.2 师生互动、探究新知

问题 3：结合上述两个例子，可以发现什么共性呢？

师生活动：A 层学生发挥核心领导力，带领其他学生共同探索。学生发现这两个实例虽然实际意义不同，但解决问题的思路是相同的，都可以归结为计算函数的改变量 Δy 与自变量的改变量 Δx 之间的比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，当 $\Delta x \to 0$ 时的极限。将这种共性抽象化，教师给出导数的详细概念。

https://doi.org/10.35534/es.0503058

定义 1：如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，$y'|_{x=x_0}$，$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$，需要注意的是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某领域内要有定义。

例 1（A、B、C 层）：求函数 $f(x)=x^2$ 在 $x_0=1$ 处的导数，即 $f'(1)$。

设计意图：通过 A 层学生的带领，帮助 B、C 层学生在导数的定义上获得更深层次的理解。加强锻炼 A 层学生的观察能力和概括能力，并且进一步让学生体会从具体到抽象的研究过程。例 1 的设置是为了加深对导数的理解，让学生学以致用。

问题 4：为了方便，有时 Δx 也可以用其他字母表示，如 h，于是导数公式变成：

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

若 $\Delta x=x-x_0$，则 $x=x_0+\Delta x$，当 $\Delta x \to 0$ 时，$x \to x_0$，于是导数的定义又可以写成什么形式呢？

师生活动：观察前两个导数公式中各个变量之间的关系，该问题主要由 A、B 层学生带领 C 层学生共同完成，B 层学生发现规律，A 层学生总结得出：

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

例 2（A、B 层）：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，求 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$。

设计意图：导数公式的表达式有很多种，通过不同的形式，让学生发现导数定义中各个变量之间的对应关系。例 2 理解起来更抽象化，需要学生对导数公式及其变形有准确的认识和判断，从而加深学生对导数公式的理解。

问题 5：在学习函数极限时，我们学习了左极限和右极限，进而还给出了极限存在的充分必要条件。同理我们还有左导数和右导数的定义和导数存在的充分必要条件，那么左右导数的定义以及导数存在的充分必要条件是什么呢？

师生活动：教师带领学生复习左右极限的定义和极限存在的充分必要条件，学生将这些知识与导数的定义相结合，写出左右导数的定义和导数存在的充分必要条件。

定义 2：设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左邻域 $[x_0-\delta, x_0]$ 上有定义，如果左极限 $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数。类似地可定义右导数。

定理 1：设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，则 $f(x_0)$ 存在的充分必要条件是 $f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 都存在且相等，即 $f'(x_0)=A \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$。

例 3（A 层）：求函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ \sin x, & x \geqslant 0 \end{cases}$，在点 x_0 处的导数。

设计意图：既能巩固以前的知识，又能使学生锻炼到类比推理的能力。例 3 的设计是为了使学生学会运用定理 1 的结论，加深对定理的理解。

3.4.3 思考问题、扩展思维

问题 6：根据前面的讨论，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，那么其导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是什么呢？根据导数的几何意义以及直线的点斜式方程，如何用导数表示出曲线在某点处的切线方程以及法线方程？

师生活动：引导学生回忆前面求曲线切线斜率的过程，和导数有什么关系？学生发现求曲线在某一点的切线斜率过程就是函数在某一点的求导过程。即 $f'(x_0)=\tan\alpha$（α 是切线与 x 轴正向的夹角）。进而得出切线方程和法线方程。

例 4：曲线 $y=x^3$ 上哪一点处的切线斜率等于 3？

设计意图：让学生感受数形结合的数学思想，感受导数的几何意义，从而加深对导数定义的理解。

问题 7：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续是指 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$；而在点 x_0 处可导是指 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在。那么可导与连续有什么关系呢？

师生活动：由 B 层学生回顾连续的定义，A 层学生带领 B、C 层学生分别根据可导和连续的定义，推导出连续和可导的关系。

例 5：讨论函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$，在点 $x=0$ 处的连续性和可导性。

设计意图：提高学生的数学推理能力，建立知识之间的逻辑关系。

3.4.4 回顾反思、深化认识

问题 8：回顾本节课学习了什么知识，总结运用了哪些方法和数学思想，有什么收获？

师生活动：教师着重从“知识”和“方法”这两个方向进行引导，回顾导数的概念是什么？它的几何含义、物理含义是什么？可导的充分必要条件是什么？可导与连续的关系是什么？让学生感受无限趋近的过程，进一步体会极限思想、数形结合思想、类比归纳思想。对于老师提问，C 层学生能够简单回答所学的知识；B 层学生在此基础上能总结出这些知识的推导过程以及使用的方法；A 层学生进一步提炼所使用的数学思想。

设计意图：让学生明白不仅知识很重要，所使用的方法、知识和知识之间的联系同样重要。使学生能形成自己的知识体系，培养他们的归纳总结能力。

4 结语

在大学数学教学中应用分层教学法在一定程度上能够减少讲授式教学带来的弊端。本文在分析分层教学法理论意义的基础上，以“导数概念”这一课为例，根据学生个体差异构建了新的教学模式，将学生划分为三个不同的层次，针对性地设计问题，落实分层施教，实现学生全面发展。

参考文献

[1] 曹晓阳. 数学分析分层教学法探讨[J]. 高等建筑教育，2012，21（5）：128-131.
[2] 吉世龙. 分层教学法在高中数学教学中的运用分析[J]. 理科爱好者，2023（2）：52-54
[3] 樊秋雯. 高中数学分层分组教学实践研究[D]. 海口：海南师范大学，2022.

https://doi.org/10.35534/es.0503058

［4］戴先文．高职高等数学教学中的分层教学法［J］．西部素质教育，2016，2（20）：77．

Layered Teaching Method of “the Concept of Derivative”

Li Gaoxi　Ren Yi

School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing

Abstract: The application of layered teaching method in college mathematics teaching can improve the traditional teaching method of lecturing, thus promoting the individualized development of students and improving learning efficiency. This paper first discusses the significance of applying layered teaching in college mathematics teaching, and then designs layered teaching methods, which are layered for students, instructional objectives, teaching and homework. Finally, taking the course of “the concept of derivative” in college mathematics as an example, the case design of hierarchical teaching is carried out.

Key words: The concept of derivative; Layered teaching method; Case study design