动力系统研究
2019 年 9 月第 1 卷第 1 期

Solving Unbounded Linear Operators with regularization method

Guo Ling

Dongguan electronic technology school, Dongguan

Abstract: for the first kind of operator equation $Au = f$, a is an unbounded linear operator on the real Hilbert space H. The dynamic system method and regularization method are used to solve the regularization problems of the above problems

$$u'(t)=-A^*(Au(t)-f)$$

By using the theory of linear operator semigroup, we can obtain the semigroup representation of the solution of the above-mentioned regularization problem, and prove that when $t \to \infty$, the regularization solution obtained converges to the solution of the original problem

Key words: inverse problem; dynamical system method; regularization; semigroup

Received: 2019-08-01; Accepted: 2019-08-25; Published: 2019-09-08

文章引用：郭玲．正则化方法求解反问题中的算子方程 $Au=f$［J］．动力系统研究，2019，1（1）：1–10.
https://doi.org/10.35534/sds.

正则化方法求解反问题中的算子方程 $Au=f$

郭 玲

东莞市电子科技学校学校，东莞

邮箱：guoling60431773@21cn.com

摘 要：针对反问题中出现的第一类算子方程 $Au=f$，其中 A 是实 Hilbert 空间 H 上的一个无界线性算子。利用动力系统方法和正则化方法，求解上述问题的正则化问题的解：

$$u'(t)=-A^*(Au(t)-f)$$

利用线性算子半群理论可以得到上述正则化问题的解的半群表示，并证明了当 $t\to\infty$ 时，所得的正则化解收敛于原问题的解.

关键词：反间题；动力系统方法；正则化；半群

收稿日期：2019–08–01；录用日期：2019–08–25; 发表日期：2019–09–08

1 引言

数学物理反问题研究的是由系统的输出结果的部分信息来反求系统的某些内部结构特征。反问题的研究在遥感、资源勘探、大气测址、系统参数识别、医学成像、无损探伤及气象预报等自然科学与工程技术领域中有着广泛的应用［1］，并引起了许多学者的关注许多数学物理反问题最终都归结为求解第一类算子方程［1］［2］［3］

$$Au=f \tag{1}$$

其中，A 为线性算子，A：$U \to F$，U 是实 Hilbert 空间，$f \in F$ 是已知向量。

下面给出不适定的定义，为此，先给出方程适定性定义如下：

定义 1［3］ 在空间（U，F）上，如果满足下列条件：

对所有元素 $f \in F$ 均存在空间 U 的解 u；

解是被唯一确定的；

问题在空间（U，F）上是稳定的

此时该问题被称为适定的，不满足上列要求的问题就被称为不适定的与适定性相对应，不适定问题分为三种类型。

定义 2［3］ 在空间（U，F）上，如果问题（1）满足下列条件之一，则称之为不适定问题：

A 不是满射，方程（1）不是对所有元素 $f \in F$ 均有解 u

A 不是单射，方程（1）可能不止一个解

逆算子 A^{-1}：$F \in U$ 存在，但不连续，即方程（1）的解不稳定。

20 世纪 40 年代前苏联院士 Tikhonov 带领的研究小组对反问题进行了系统的研究，并提出了著名的 Tikhonov 正则化方法．反问题研究的另一个方向是 Landweber 等引入的迭代正则化方法［4］，以及 Nashed 提出的广义逆正则化方法［5］，随后，Morozov 等用泛函分析的框架对反问题进行了系统的抽象的处理［6］。

近年发展起来的研究反问题的正则化方法有牛顿型方法［7］［8］［9］以及动力系统方法［10］等。

动力系统方法（DSM）是由 Ramm A G［10］引入，作为解决不适定算子方程的一种正则化方法．其基本思想史，增加一个时间变址，构造出与间题（1）对应的动力系统，求出该动力系统的解，并研究解，当时间趋于无穷大时的性态，从而得到（1）的正则化解。

文献[1]利用动力系统法研究了病态线性代数系统的梯度法，文献[11][12][13]则利用动力系统方法研究了当方程（1）的主算子 A 为有限秩算子时的正则化解．

本文利用动力系统方法研究方程（1）的主算子为无界线性算子时，方程的正则化解．第二节中， 我们将引入动力系统方法；第三节给出本文的主要结论．

2 动力系统方法

求解不适定问题（1）的动力系统方法．其思想是求解与方程（1）相对应的正则化的动力系统：

$$u'(t)=-A^*(Au(t)-f),\ u(0)=u^0,\ u^0\perp N,\ u':=\frac{du}{dt} \tag{2}$$

其中 A^*A 为一个正自伴算子，且可生成半群，从而（2）的解可用半群表示如下：

$$u(t)=e^{-tT}u^0+e^{-tT}\int_0^t e^{sT}\,ds A^* f$$

然后，再要证明（2）的解当时间趋于无穷大时稳态解存在，即 $\lim\limits_{t\to\infty}u(t)=u(\infty)$ 存在，且 $u(\infty)=y$，即

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t)-y\|=0 \tag{3}$$

从而得到问题（1）的动力系统正则化解

通常，在实际情况中，方程（1）的右端是观测数据，带有误差，即（1）的右端为带扰动的项 f_δ，此时要解决的间题为

$$u'_\delta(t)=-A^*(Au_\delta(t)-f_\delta),\ u_\delta(0)=u_0 \tag{4}$$

并要证明，对千一个合适的停止时间 t_δ，定义 $u_\delta:=u_\delta(t_\delta)$，有

$$\lim_{\delta\to0}\|u_\delta-y\|=0 \tag{5}$$

然而对一般的算子方程 $Au=f$ 而言，A 可能为无界算子。例如当 A 是微分算子时，算子 A 是无界 的因此研究（1）的主算子 A 是无界的这种情况非常必要的而这正是本文研究的主要目的。

3 主要结果

设 A：$H\rightarrow H$ 是实 Hilbert 上的线性闭稠定的无界算子。假设方程

$$Au=f \tag{6}$$

有解，但解不需要唯一．定义 y 为唯一的最小范数解，即 $y\perp N:=N(A):=\{u:Au=O\}$. 利用动力系 统方法，我们可以构造与（6）相对应的正则化的动力系统：

$$u'(t)=-A^{*}(Au(t)-f),\ u(0)=u_0 \tag{7}$$

其中，$u_0\perp N$，u_0 任意。定义 $P:=A^{*}A$，$Q:=AA^{*}$，$T_1(t)=e^{-tP}$，$S_1(t)=e^{-tQ}$，$T_2(t)=e^{tP}$，$S_2(t)=e^{tQ}$。

根据半群的定义及性质，易知 T_1，T_2，S_1，S_2 均为压缩半群［13］. 此时，（7）的唯一解为：

$$u(t)=T_1(t)u_0+T_1(t)\int_0^t T_2(s)]\,dsA^{*}f$$

下面证明当 $t\rightarrow\infty$ 时（7）的正则化形式解趋于（6）的解．同时考虑方程（7）的右端项带有误差，并证明误差趋于零时，带误差的正则化解趋于精确解．

3.1 准确数值

定理 1 设 $u_0\perp N$. 方程（7）在 $(0,\infty)$ 上有唯一解，且 $u(\infty)=y$，其中，$u(\infty)=\lim\limits_{t\rightarrow\infty}u(t)$

证明定义 $\omega:=u(t)-y$，$\omega_0=\omega(0)$，$\omega_0\perp N$. 则有

$$\omega'=-P\omega,\ P:=A^{*}A \tag{8}$$

方程（8）的唯一解为 $\omega=T_1(t)\omega_0$。因此

$$\|\omega(\infty)\|^2=\int_0^\infty e^{-2t\lambda}\,d(E_\lambda\omega_0,\omega_0)$$

其中 (u,v) 为 H 上的内积，E_λ 为自伴算子 P 的预解式。因此

$$\|\omega(\infty)\|^2=\lim_{t\to\infty}\int_0^{\infty}e^{-2t\lambda}\,d(E_\lambda\omega_0,\omega_0)=\|P_{N\omega 0}\|^2=〗0$$

其中 P_N 压为 N 上的正交投影算子，定理 1 得证.

3.2 扰动数值 $f\delta$

若方程（6）中 f 未知，但知其扰动项 $f\delta$，且 $\|f\delta-f\|\leqslant\delta$ 利用 DSM，考虑

$u_\delta'=-A^*(Au_\delta-f)$，$u_\delta(0)=u_0$

记 $\omega_\delta=u_\delta-y$，P：$=A^*A$，$T_1(t)=e^{-tP}$，易知 T_1 为算子半群 . $\omega_\delta(0)=\omega_0$：$=u_0-y\epsilon N^\perp$.

引理 1: 若 A 是 Hilbert 空间 H 上的无界线性算子，则 $\forall_x\epsilon H$，有 $\|A^*x\|\leqslant\|\vdash AA^*x\|$.

证明 $\forall_x\epsilon H$，$\|A^*x\|\leqslant\|〖AA^*x\|\Leftrightarrow\|A^*x\|^2\leqslant\|AA^*x\|^2\Leftrightarrow(A^*x,A^*x)\leqslant\langle AA^*x,AA^*x\rangle\Leftrightarrow\langle AA^*x,x\rangle\leqslant\langle AA^*x,AA^*x\rangle\Leftrightarrow\langle AA^*x,(AA^*-I)x\rangle\geqslant 0.$

事实上，利用谱理论，有

$$\langle AA^*x,(AA^*-I)x\rangle=\int_0^{+\infty}\lambda(\lambda-1)d(E_\lambda x,x)=\int_0^{+\infty}\lambda(\lambda-1)\|x\|^2dE_\lambda\geqslant 0$$

故 $\|A^*x\|\leqslant\|AA^*x\|$ 结论得证.

定理 2 如果 $\lim_{\delta\to 0}t_\delta=\infty$，$\lim_{\delta\to 0}t_\delta\delta=0$，$\omega_0\perp N$，则 $\lim_{\delta\to 0}\|\omega_\delta(t_\delta)\|=0$，

证明 易知

$$w_\delta'=-Pw_\delta+\eta_\delta \tag{9}$$

方程(9)的唯一解为

$$w_\delta(t)=T_1(t)w_\delta(0)+\int_0^t T_1(t-s)A^*(f_\delta-f)\,ds$$

下面证明 $\lim_{t\to\infty}\|w_\delta(t)\|\models 0$. 因为

$$\lim_{t\to\infty}\|w_\delta(t)\|\leqslant\lim_{t\to\infty}\|T_1(t)w_\delta(0)\|+\lim_{t\to\infty}\left\|\int_0^t T_1(t-s)A^*(f_\delta-f)\,ds\right\| \tag{10}$$

根据引理 1，有

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t T_1(t-s)A^*(f_\delta-f)\,ds\right\|&=\left\|\int_0^t e^{-(t-s)P}A^*(f_\delta-f)\,ds\right\|=\left\|\int_0^t A^*e^{-(t-s)Q}(f_\delta-f)\,ds\right\|\\&\leqslant\left\|\int_0^t AA^*e^{-(t-s)Q}(f_\delta-f)\,ds\right\|=\left\|\int_0^t Qe^{-(t-s)Q}(f_\delta-f)\,ds\right\|\\&=\left\|\int_0^t\int_0^{\infty}\lambda e^{-(t-s)\lambda}.dE_\lambda(f_\delta-f)ds\right\|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-(t-s)\lambda} \lambda ds \right) dE_\lambda (f_\delta - f) \right\| \\
&= \left\| \int_0^\infty (1 - e^{-t\lambda}) dE_\lambda (f_\delta - f) \right\| \leqslant \left\| \int_0^\infty (1 - e^{-t\lambda}) dE_\lambda \right\| . \|(f_\delta - f)\| \\
&= \left\| I - e^{-tQ} \right\| . \|(f_\delta - f)\| = \|I - S_1(t)\| . \|(f_\delta - f)\| \leqslant 2\delta \qquad (11)
\end{aligned}
$$

由(10)和(11), 有

$$\lim_{\delta\to 0} \|w_\delta(t_\delta)\| \leqslant \lim_{\delta\to 0} (\|T_1(t_\delta) w_\delta(0)\| + 2\delta) = 0$$

因为$w_0 \perp N$, 则有: $\lim_{\delta\to 0} (\|T_1(t_\delta) w_\delta(0)\|) = \lim_{\delta\to 0} \left(\left\|e^{-t_\delta P} w_\delta(0)\right\|\right) = \|P_N w_0\| = 0$. 定理2得证.

3.3 变分原理

考察具有扰动项 f δ 的方程（6），通过 DSM 可变成如下形式：

$$u_\delta' = -A^* A u_\delta + A^* f_\delta, u_\delta(0) = u_0 \qquad (12)$$

定义为方程的最小范数解。

定理 3 假设 ‖$Au_\delta - f\delta$‖$>C\delta$. 方程

$$h(t) := \|Au_0(t) - f_\delta\| = C\delta, C\text{为常数}, C \in (1,2) \qquad (13)$$

的解t_δ存在, 唯一, 且

$$\lim_{\delta\to 0} \|u_\delta(t_\delta) - y\| = 0 \qquad (14)$$

证明 定义$v_\delta(t) := Au_\delta(t) - f_\delta$, $P := A^*A$, $Q := AA^*$, $w(t) := u(t) - y$, $w_0 := u_0 - y$.

首先证明方程(13)在$C \in (1,2)$时的解的存在性:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|v_\delta(t)\|^2 &= 2 \langle Au_\delta'(t), Au_\delta(t) - f_\delta \rangle \\
&= 2 \langle A[-A^*(Au_\delta(t) - f_\delta)], Au_\delta(t) - f_\delta \rangle \\
&= -2 \|A^* v_\delta(t)\|^2 \leqslant 0 \qquad (15)
\end{aligned}
$$

因此, $\|v_\delta(t)\|$是非增函数. 由于$-P = -A^*A$及$-Q = -AA^*$可分别生成半群$T_1(t) = e^{-tP}$, $S_1(t) = e^{-tQ}$, 易知:

$$T_1(t) A^* = A^* S_1(t), AT_1(t) = S_1(t) A$$

利用这些公式及解的表达式:

$$u_\delta(t) = T_1(t) u_0 + T_1(t) \int_0^t T_2(s) ds A^* f_\delta$$

可得到:

$$
\begin{aligned}
\|v_\delta(t)\| &= \|Au_\delta(t) - f_\delta\| \\
&= \left\| AT_1(t) u_0 + AT_1(t) \int_0^t T_2(s) ds A^* f_\delta - f_\delta \right\| \\
&= \left\| S_1(t) Au_0 + S_1(t) \int_0^t T_2(s) ds Q f_\delta - f_\delta \right\| \\
&= \|S_1(t) A(u_0 - y) + S_1(t) f + S_1(t)(S_2(t) - I) f_\delta - f_\delta\| \\
&= \|S_1(t) Aw_0 - S_1(t) f_\delta + S_1(t) f\|
\end{aligned}
$$

记

$$\lim_{t\to\infty} S_1(t) Aw_0 = \lim_{t\to\infty} AT_1(t) w_0 = AP_N w_0 = 0$$

事实上, 由算子A的连续性及谱分解理论, 有

$$\lim_{t\to\infty} T_1(t) w_0 = \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty e^{-st} dE_s w_0 = P_N w_0$$

https://doi.org/10.35534/sds.

因此，

$$\lim_{t\to\infty}\|v_\delta(t)\| = \lim_{t\to\infty}\|S_1(t)(f-f_\delta)\| \leqslant \|f-f_\delta\| \leqslant \delta \tag{16}$$

其中$S_1(t)$为压缩半群, $\|S_1(t)\| \leqslant 1$. 函数$h(t)$在$[0,\infty)$上连续, $h(0)=\|Au_0-f_\delta\|>C\delta$, $h(\infty)<\infty$. 因此, 方程(13)必存在解t_δ.

现在证明解t_δ的唯一性. 不失一般性, 假设存在另一个解$t_1>t_\delta$使得$\|Au_\delta(t_1)-f_\delta\|=C\delta$. 因为$\|v_\delta(t)\|$是非增的且$\|v_\delta(t_\delta)\|=\|v_\delta(t_1)\|$, 则有

$$\|v_\delta(t)\| = \|v_\delta(t_\delta)\|, \forall t\in[t_\delta,t_1]$$

因此,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v_\delta(t)\|^2 = 0, \forall t\in(t_\delta,t_1) \tag{17}$$

由(15)和(17)可知

$$A^*v_\delta(t) = A^*(Au_\delta(t)-f_\delta) = 0, \forall t\in[t_\delta,t_1]$$

此结果与(12)表明:

$$u_\delta'(t) = 0, \forall t\in(t_\delta,t_1) \tag{18}$$

又因为

$$\begin{aligned}
u_\delta'(t) &= -Tu_\delta(t) + A^*f_\delta \\
&= -T\left(\mathrm{e}^{-tT}u_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-s)T}A^*f_\delta\mathrm{d}s\right) + A^*f_\delta \\
&= -T\mathrm{e}^{-tT}u_0 - \left(I-\mathrm{e}^{-tT}\right)A^*f_\delta + A^*f_\delta \\
&= -\mathrm{e}^{-tT}(Tu_0 - A^*f_\delta)
\end{aligned} \tag{19}$$

根据(18), (19), 可知$Tu_0-A^*f_\delta = \mathrm{e}^{tT}\mathrm{e}^{-tT}(Tu_0-A^*f_\delta)=0$.

因为$Tu_0-A^*f_\delta=0$, 根据(19), $\forall t\geqslant 0$, 有$u_\delta'(t)=0$, 因此$u_\delta(t)=u_\delta(0)$. 故

$$\|Au_\delta(0)-f_\delta\| = \|Au_\delta(t_\delta)-f_\delta\| = C\delta$$

矛盾.

以上证明了解t_δ的唯一性.

最后证明解t_δ使方程(14)收敛, 首先, 我们有如下的估计:

$$\begin{aligned}
\|Au(t_\delta)-f\| &\leqslant \|Au(t_\delta)-Au_\delta(t_\delta)\| + \|Au_\delta(t_\delta)-f_\delta\| + \|f_\delta-f\| \\
&\leqslant \left\|\mathrm{e}^{-t_\delta Q}\int_0^{t_\delta}\mathrm{e}^{sQ}Q\mathrm{d}s\right\|\|f_\delta-f\| + C\delta + \delta
\end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$\left\|\mathrm{e}^{-t_\delta Q}\int_0^{t_\delta}\mathrm{e}^{sQ}Q\mathrm{d}s\right\| = \left\|I-\mathrm{e}^{-t_\delta Q}\right\| \leqslant 2$$

根据(20), 有

$$\lim_{\delta\to 0}\|Au(t_\delta)-f\| = 0 \tag{21}$$

下面证明

$$\lim_{\delta\to 0} t_\delta = \infty$$

利用反证法. 假设存在$t_0>0$及一序列$(t_{\delta n})_{n=1}^{\infty}$, $t_{\delta n}<t_0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|Au(t_{\delta n})-f\| = 0 \tag{22}$$

和(15)的证明类似, 可证得

$$\frac{\mathrm{d}\|v\|^2}{\mathrm{d}t} \leqslant 0$$

其中, $v(t) := Au(t) - f$. 因此, $\|v(t)\|$非增. 这和(22)表明: $\|v(t_0)\| = \|Au(t_0) - f\| = 0$.

因此,

$$0 = v(t_0) = e^{-t_0 Q} A(u_0 - y).$$

这表明$A(u_0 - y) = e^{t_0 Q} e^{-t_0 Q} A(u_0 - y) = 0$, 所以$u_0 - y \in N$. 由于之前设定$u_0 - y \in N^{\perp}$, 因此$u_0 = y$, 因为$C\delta \leqslant \|Au_0 - f_\delta\| = \|f - f_\delta\| \leqslant \delta$, $1 \leqslant C \leqslant 2$, 矛盾. 故$\lim\limits_{\delta \to 0} t_\delta = \infty$.

之前我们定义$w_\delta(t) := u_\delta(t) - y$. 现证明$\|w_\delta(t)\|$在$[0, t_\delta]$上非增. 事实上

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|w_\delta(t)\|^2 &= 2\langle u_\delta'(t), u_\delta(t) - y\rangle \\
&= 2\langle -A^*(Au_\delta(t) - f_\delta), u_\delta(t) - y\rangle \\
&= -2\langle Au_\delta(t) - f_\delta, Au_\delta(t) - f_\delta + f_\delta - Ay\rangle \\
&\leqslant -2\|Au_\delta(t) - f_\delta\|(\|Au_\delta(t) - f_\delta\| - \|f_\delta - Ay\|) \\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

其中我们用到不等式: $\|Au_\delta(t) - f_\delta\| \geqslant C\delta > \|f_\delta - Ay\|$, $t \in [0, t_\delta]$. $\forall \varepsilon > 0$. 因为$\lim\limits_{t \to \infty} u(t) = y$, 则$\exists t_0 > 0$($t_0$ 与δ有关), 使得

$$\|u(t_0) - y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{23}$$

因为$\lim\limits_{\delta \to 0} t_\delta = \infty$, 则$\exists \delta_0$使得当$t_\delta > t_0$时, $\forall \delta \in (0, \delta_0)$. 因为$\|w_\delta(t)\|$在$[0, t_\delta]$上非增, 有

$$\|w_\delta(t_\delta)\| \leqslant \|w_\delta(t_0)\| \leqslant \|u_\delta(t_0) - u(t_0)\| + \|u(t_0) - y\|, \forall \delta \in (0, \delta_0) \tag{24}$$

其中

$$\|u_\delta(t_0) - u(t_0)\| = \left\| \int_0^{t_0} e^{-(t_0 - s)P} A^*(f_\delta - f)\, \mathrm{d}s \right\|.$$

类似(11)式的证明过程, 易知

$$\|u_\delta(t_0) - u(t_0)\| = \left\| \int_0^{t_0} e^{-(t_0 - s)P} A^*(f_\delta - f)\, \mathrm{d}s \right\| = \|I - e^{-t_0 Q}\| \|f_\delta - f\| \leqslant 2\delta \tag{25}$$

由(25)式可知, 对于任意给定的$t_0 > 0$, 可知$\lim\limits_{\delta \to 0} \|u_\delta(t_0) - u(t_0)\| = 0$. 因此, $\exists \delta_1 \in (0, \delta_0)$, 使得

$$\|u_\delta(t_0) - u(t_0)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \forall \delta \in (0, \delta_1) \tag{26}$$

根据(23)–(26)式, 可得出

$$\|u_\delta(t_\delta) - y\| = \|w_\delta(t_\delta)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall \delta \in (0, \delta_1) \tag{27}$$

因此, $\lim\limits_{\delta \to 0} u_\delta(t_\delta) = y$.

参考文献

[1] 刘继军. 不适定问题的正则化方法及应用 [M]. 北京：科学出版社，2005.

[2] 王彦飞. 反演问题的计算方法及其应用 [M] 北京：高等教育出版社，2007.

[3] Andrey N Tikhonov，Vasiliy Y Arsenin. Solutions of Ill–posed Problems [M]. WINSTON V H & SONS Washington DC，1977.

[4] Landweber L. An iteration formula for Fredholm integral equation of the first kind [J]. Amer J Math，1951，73：615–624.

https://doi.org/10.35534/sds.

[5] Nashed M Z. Generalized Inverses and Applications [M]. New York: Academic Press, 1976.

[6] Morozov VA. Methods for Solving Incorrectly Posed Problems [M]. New York: Springer, 1984.

[7] Kaltenba. cher B. Some Newton-type methods for the regularization of nonlinear ill-posed problems [J]. Inverse Problems, 1997, 13: 729-753.

[8] 薛雅萍，吴开谡，刘晓晶. 求解非线性算子方程的梯形牛顿法 [J]. 应用泛函分析学报 2009，11（1）：90-96.

[9] JIN Qinian. A convergence analysis of the iteratively regularized Gauss-Newton method under the Lipschitz condition [J]. Inverse Problems, 2008, 24 (4).