动力系统研究
2019 年 12 月第 1 卷第 2 期

Numerical algorithm based on high oscillation integral

Sheng Hui

Northwest University of technology, Xi'an

Abstract: To solve highly oscillatory model equations efficiently，based on asymptotic integral algorithm for highly oscillatory integrator，an efficient numerical algorithm is proposed for nonhomogeneous linear dynamic systems which has the characteristic of time-dependent high-frequency oscillations. The nonhomogeneous dynamic system is reformulated as a system of exponential form by variation-of-constants formula，the exponential part is solved by Magnus integrator, and highly oscillatory term is solved by asymptotic integral algorithm. The numerical examples indicate that the solution precision of the algorithm improves with the increase in oscillatory frequency，and it is easy to be used and easily extended to the case of multiple equations.

Key words: highly oscillatory nonhomogeneous dynamic system; highly oscillatory integral; Magnus integral; numerical algorithm

Received: 2019-10-21; Accepted: 2019-11-10; Published: 2019-12-09

文章引用：盛辉．基于高振荡积分的数值算法［J］．动力系统研究，2019，1（2）：43–51.
https://doi.org/10.35534/sds.

基于高振荡积分的数值算法

盛 辉

西北工业大学，西安

邮箱：hsheng86664@sina.com

摘　要：为实现高振荡问题模型方程的有效数值求解，基于高振荡积分的渐进积分算法，针对随时间高频率振荡的非齐次线性动力系统给出有效的数值算法．基于变分常数公式将非齐次动力系统重新表示为指数形式，利用 Magnus 积分方法求解指数部分，利用渐进积分算法求解高振荡的积分项．数值实验表明：该算法求解精度随振荡频率的增大而提高，且简单易用，也可以容易推广到多个方程的情形．

关键词：高振荡非齐次动力系统；高振荡积分；Magnus 积分；数值算法

收稿日期：2019–10–21；录用日期：2019–11–10；发表日期：2019–12–09

引言

高振荡动力系统广泛存在于许多动力学领域，如原子分子动力学系统、电路仿真系统、柔性多体力学系统以及卫星天线的折叠情形、车辆悬轴导向系统的定位过程等．本文主要研究如何针对高振荡问题的模型方程进行有效的数值求解．高振荡微分方程的数值积分方法历来是微分方程数值求解领域中的焦点问题之一，经典数值算法效果甚微，所以激励人们探讨新颖而富有创造性的数值方法．

ISERLES 等 [3] [4] 提出基于 Magnus 方法数值求解高振荡线性微分方程，该法完全不同于传统的方法，是个重要进展．本文在 Magnus 方法的基础上初步考虑高振荡非齐次动力系统的有效数值算法．

考虑高振荡非齐次动力系统的初值问题 $y'(t)=A_\omega y(t)+f(t)$，$t\geqslant 0$，$y(0)=y0\in R^d$ （1）

式中：A_ω 为具有大的虚特征值的非奇异常数矩阵，且 $A_\omega\geqslant 1$，$\omega\geqslant 1$ 均为实参数；$f(t)$ 为光滑的矢值函数．通过变分常数公式得式（1）的隐式解

$$y(t)=e^{A_\omega t}y_0+\int_0^t e^{t-\tau A\omega}f(\tau)\,d\tau=e^{A_\omega t}y_0+I[f(t)] \qquad (2)$$

式中：$I[f(t)]$ 为高振荡积分．

首先给出齐次线性微分方程的基于 Magnus 展式的数值格式，然后基于渐进方法给出非齐次项的高振荡积分的有效算法；最后通过数值实验验证本文方法处理高振荡非齐次动力系统问题的有效性．

1 基于 Magnus 方法的数值积分方法

首先考虑式（1）的齐次方程

$$y'(t)=A(t)y(t),\quad t\geqslant 0 \qquad (3)$$

式（3）为基于 Magnus 展式的数值算法 [3]，其解为

$$y(t)=e^{\Omega(t)}y_0 \qquad (4)$$

式中：Ω 满足 $\Omega'=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{B_k}}{\mathrm{k!}}ad_\Omega^k A$，$t\geqslant t_0$，$\Omega(t_0)=O$．$\{B_k\}_{k\in z+}$ 为 Bernoulli 函数，且

$$\begin{cases} ad_{\Omega}^{0} A=\Omega \\ ad_{\Omega}^{k} A=[A,\ ad_{\Omega}^{k-1} A]=Aad_{\Omega}^{k-1} A-Aad_{\Omega}^{k-1} AA \\ k>0 \end{cases}$$

式（4）中的 Ω 由无穷递归级数 Magnus 展式（见式（5））给定 .

$$\Omega(t) = \int_0^t \boldsymbol{A}(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^{\xi_1} [\boldsymbol{A}(\xi_2), \boldsymbol{A}(\xi_1)]\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_1 + \frac{1}{12}\int_0^t\int_0^{\xi_1}\int_0^{\xi_2} [\boldsymbol{A}(\xi_3), [\boldsymbol{A}(\xi_2), \boldsymbol{A}(\xi_1)]]\mathrm{d}\xi_3\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_1 + \frac{1}{4}\int_0^t\int_0^{\xi_1}\int_0^{\xi_2} [[\boldsymbol{A}(\xi_3), \boldsymbol{A}(\xi_2)], \boldsymbol{A}(\xi_1)]]\mathrm{d}\xi_3\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_1 + \cdots \quad (5)$$

Magnus 展式具有保持几何特性的优越特点，是当前主要的李群数值积分方法之一，其保持几何特性的原因在于其逼近解析解时，严格将逼近解限定在同一几何空间中，可给出类似解析解的几何性质 . 为得到式（4）的解，必须截断式（5），并将该积分数值求积 . 以步长 $h > 0$ 逼近 y（$tn + 1$）$=e\Omega n$（h）y（tn）的 *Magnus* 数值格式的形式为

$$y(t_{n+1})=e^{\tilde{\Omega}_n(h)})\,y(t_n) \quad (6)$$

式中：$\tilde{\Omega}_n$（h）为 Ω_n（h）的截断部分，其积分由数值积分求解 .

对于 Magnus 积分方法，考虑只截断式（4）的第 1 项，并用简单的中点公式数值积分，有

$$\Omega(h) \approx \int_0^h A(t_n+\tau)\,d_\tau \approx hA(t_n+h/2) \quad (7)$$

从而得到 2 阶的 Magnus 格式

$$\begin{cases} \Omega_n=hA(t_n+h/2) \\ y+1=e^{hA(t_n+h/2)}y_n) \end{cases} \quad (8)$$

2　高振荡积分的渐进方法

对于高振荡积分 $I[f] = \int_a^b f(x)\,e^{iwg(x)}dx,\ \omega \gg 1$　（9）

式中：$f,\ g \in C^{\infty}[a,\ b]$，$g$ 在 $[a,\ b]$ 严格单调且 $g' \neq 0$。传统的方式常基于高斯数值积分，但是即使选取极小的步长，结果往往也不正确，特别是当 ω 很大时，逼近失效，当 $\omega \to \infty$ 时，其误差为 O（1）. 另一种方法为

ISERLES 等发展起来的渐进方法。对式（12）分部积分得

$$I[f]=\int_a^b f(x)\,e^{i\omega g(x)}dx=\frac{1}{i\omega}\int_a^b\frac{f(x)}{g'(x)}\frac{d}{dx}e^{i\omega g(x)}dx=$$
$$\frac{1}{i\omega}\left[\frac{f(x)}{g'(x)}e^{i\omega g(x)}\right]_a^b-\frac{1}{i\omega}\int_a^b\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g'(x)}\right]e^{i\omega g(x)}dx=Q_1^A[f]-\frac{1}{i\omega}I[\sigma_1]$$

定义 $\sigma_0[f](x)=f(x)$，$\sigma_{k+1}[f](x)=\frac{d}{dx}\frac{\sigma_k[f](x)}{g'(x)}$ $k=0,1,\cdots,m$，反复使用分部积分，得渐进展式

$$Q_s^A=-\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{(-i\omega)^k}\left[\frac{e^{i\omega g(b)}}{g'(b)}\sigma_{k-1}[f](b)-\frac{e^{i\omega g(a)}}{g'(a)}\sigma_{k-1}[f](a)\right]$$

且 ISERLES 等已经证明对于式（9）型的高振荡积分，当高振荡参数 $\omega\to\infty$ 时具有无穷展式

$$I[f]\sim-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(-i\omega)^k}\frac{e^{i\omega g(b)}}{g'(b)}\sigma_{k-1}[f](b)-\frac{e^{i\omega g(b)}}{g'(a)}\sigma_{k-1}[f](a)\right]\tag{10}$$

并且误差为 $I[f]-Q_s^A\sim O(\omega^{-s-1})$ （11）

对于最简单的情形 $g(x)=x$，式（10）为

$$I[f]\sim-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(-i\omega)^k}\left[e^{i\omega g}f^{k-1}(1)-f^{k-1}(0)\right]$$

3　高振荡非齐次方程的格式

首先考虑式（2）的积分项

$$I[f]=\int_0^h f(x)\,e^{(h-x)A_\omega}dx=e^{hA_\omega}\int_0^h f(x)\,e^{-xA_\omega}dx=-e^{hA_\omega}\frac{1}{A_\omega}\left(\int_0^h f(x)\frac{d}{dx}e^{-xA_\omega}dx\right)=$$
$$-e^{hA_\omega}\frac{1}{A_\omega}\left(f(h)\,e^{-hA_\omega}-f(0)-\int_0^h e^{-xA_\omega}\frac{d}{dx}f(x)\,dx\right)\triangleq e^{hA_\omega}(Q_1^A-I(\sigma_1))\tag{12}$$

即

$$Q_1^A=\frac{1}{A_\omega}(f(0)-f(h)\,e^{-hA_\omega})\qquad I(\sigma_1)=-\frac{1}{A_\omega}\int_0^h e^{-xA_\omega}\frac{d}{dx}f(x)\,dx$$

对式(12)中的 $I(\sigma_1)$ 分部积分，得

$$I[f]=e^{hA_\omega}\left(\frac{1}{A_\omega}(f(0)-f(h)\,e^{-hA_\omega})-\frac{1}{A_\omega^2}(f'(h)\,e^{-hA_\omega}-f'(0))+\frac{1}{A_\omega^2}\int_0^h f''(x)\,e^{-xA_\omega}dx\right)\triangleq$$
$$e^{hA_\omega}(Q_2^A-I(\sigma_2))$$

即

$$Q_2^A=\frac{1}{A_\omega}(f(0)-f(h)\,e^{-hA_\omega})-\frac{1}{A_\omega^2}(f'(h)\,e^{-hA_\omega}-f'(0))\quad I(\sigma_2)=\frac{1}{A_\omega^2}\int_0^h f''(x)\,e^{-xA_\omega}dx\tag{13}$$

由上述收敛定理得

$$I[f]-Q_2^A\sim O(\omega^{-2-1})\tag{14}$$

考虑从 tn 积分到 $tn+1$，步长为 h，结合式（8）的 2 阶 Magnus 格式和式（13）的 2 阶渐进高振荡积分格式，可得高振荡非齐次动力系统的格式

$$y_{n+1}=e^{hA_\omega}y_n+\frac{1}{A_\omega}\left(ft_n\right)-f\left(t_{n+1}\right)e^{-hA_\omega}-\frac{1}{A_\omega^2}\left(f'\left(t_{n+1}\right)e^{-hA_\omega}-f'\left(t_n\right)\right)\quad(15)$$

式（15）为求非齐次非线性微分方程的 1 个简单的数值格式。

4　数值实验

基于本文提出的基于渐进方法的高振荡非齐次动力系统算法，针对下述算例分析其有效性 .

算例考虑 2 阶动力系统初值问题：$y''(t)=-\omega y(t)+99\sin t$，$y(0)=1$，$y'(0)=11$，$\omega$ 为常数，转化为矢量形式得

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 99\sin t \end{pmatrix}$$

考虑高振荡参数 ω 在 4 种情形下的数值计算结果：

（1）取 $\omega=10$ 时的精确解为

$y(t)=\cos(10^{1/2}t)+11\sin t$

（2）取 $\omega=100$ 时的精确解为

$y(t)=\cos(10t)+\sin(10t)+\sin t$

（3）取 $\omega=1\,000$ 时的精确解为

$y(t)=121/1110\cdot10^{1/2}\cdot\sin(10\cdot101/2t)+\cos(10\cdot10^{1/2}t)+11/111\sin t$

（4）取 $\omega=10\,000$ 时的精确解为

$y(t)=111/10\,100\cdot\sin(100t)+\cos(100t)+1/101\cdot\sin t$

图 1 ~ 4 为 ω 取不同值时 2 阶格式的数值解、精确解和误差 . 步长 h 为 0. 1，数值用无量纲化处理 .

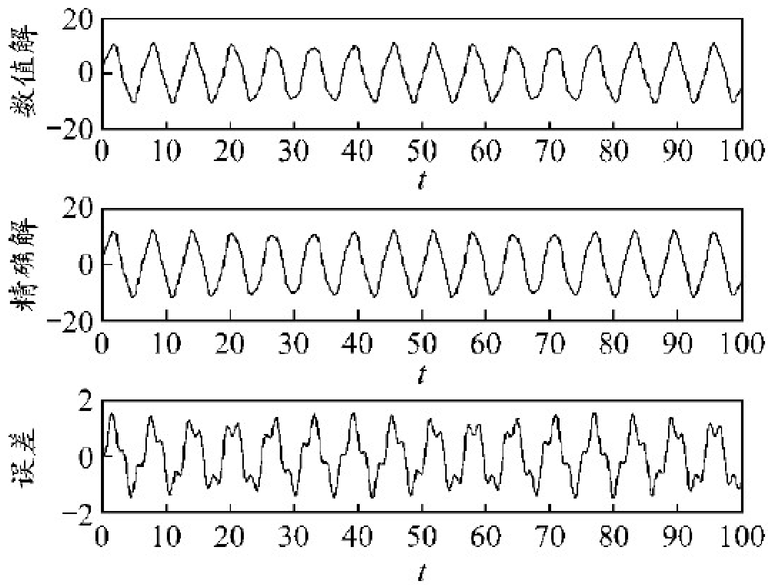

图 1　当 ω = 10 时 2 阶格式的数值解、精确解和误差

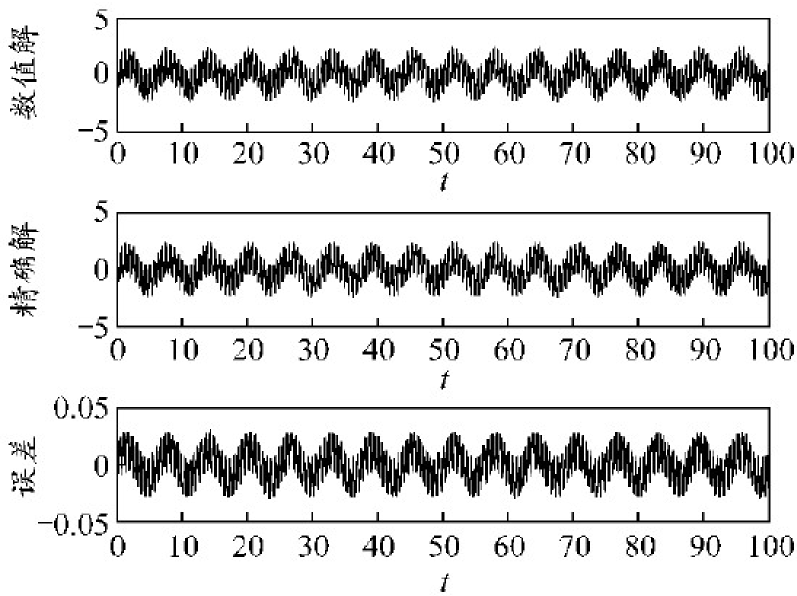

图 2　当 ω = 100 时 2 阶格式的数值解、精确解和误差

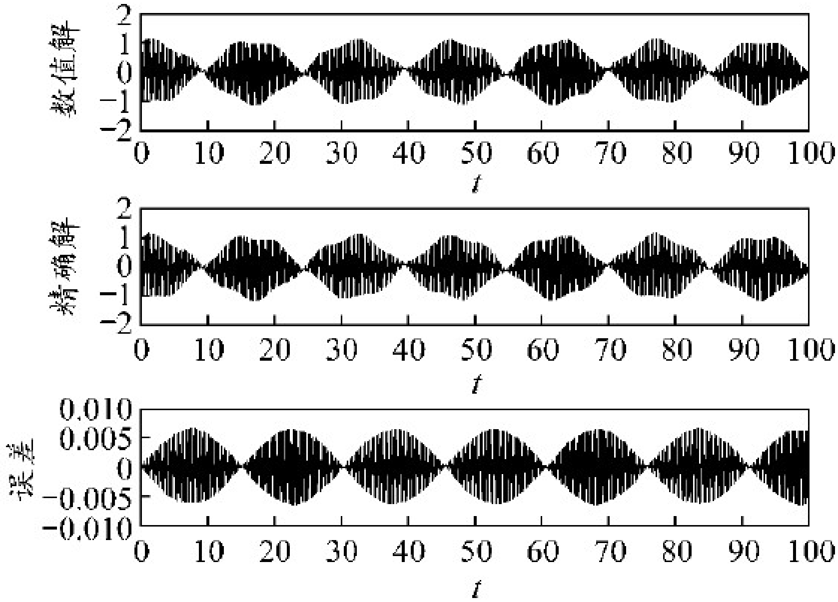

图 3　当 ω = 1 000 时 2 阶格式的数值解、精确解和误差

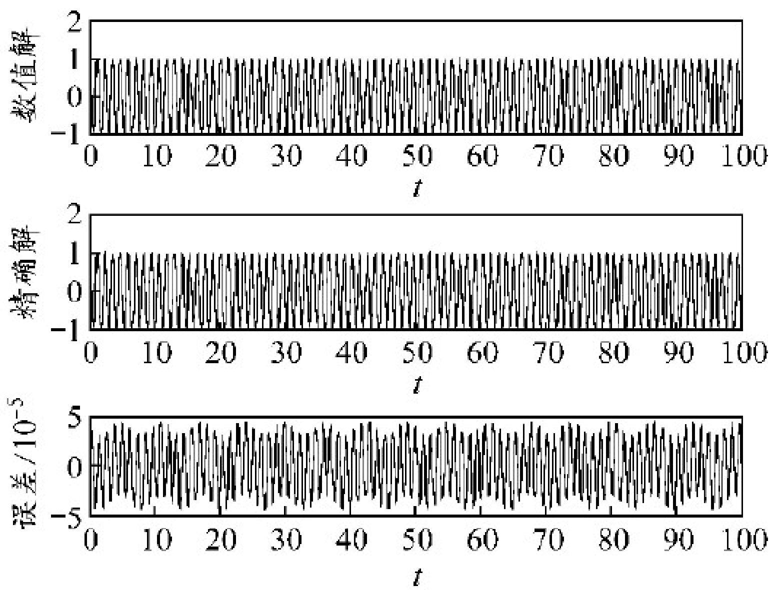

图 4　当 ω = 10 000 时 2 阶格式的数值解、精确解和误差

由图 1 ~ 4 可知本文方法可较准确地计算出高振荡的非齐次方程，且即使在振荡频率 ω 很大的情况下，仍然可有效地求解；另外，随着振荡频率 ω 增大，

其精度也随之增大，显示出独特的捕捉高振荡特性的特点 .

5 结论

为求解高振荡非齐次动力系统，将非齐次方程转化为指数形式，然后分成 2 部分分别处理，指数部分利用 Magnus 积分方法求解，并给出简单的 2 阶格式；对于高振荡的积分部分采用渐进积分方法进行有效处理，给出各阶格式的表达式；最后采用 2 阶 Magnus 格式耦合 2 阶的渐进积分格式考虑典型算例 . 从数值实验结果可知，本文方法的独特优势在于其求解精度随着振荡频率增大而增大，这与传统方法不同 . 本文的方法简单，计算量小，较容易推广到多个方程的情形 .

参考文献

[1] PETZOLD L R，JAY L O，YEN J. Numerical solution of highly oscillatory ordinary differential equations [J]. Acta Numerica，1997（6）：437–483.

[2] HAIRER E，LUBICH C，WANNER G. Geometric Numerical Integration [M]. Berlin：Springer，2002.

[3] ISERLES A，NφRSETT S P. On the solution of linear differential equations in Lie groups [J]. Philos Trans R Soc A：Math Phys & Eng Sci，1999，357（1754）：983–1019.

[4] ISERLES A. On the global error of discretization methods for highly oscillatory ordinary differential equations [J]. BIT Numer Math，2002，42（3）：561–599.

[5] 黄玲. 加权本质非振荡格式和快速扫描法和在行人流模型中的应用 [D]. 中国科学技术大学，2008.

[6] 闫海青，唐晨，张芳，et al. 指数时程差分 Runge–Kutta 法在非线性高振荡及迟滞系统中的应用 [J]. 天津大学学报，2005（06）：23–27.