现代物理进展
2019 年 8 月第 1 卷第 1 期

Squeezing properties of light field in the system of interaction between Bose Einstein condensate and two mode squeezed coherent state light field

Tie Chenghua

Shenyang Normal University, Shenyang

Abstract: In this paper, the orthogonal squeezing properties of the two-level atom's Bose Einstein condensate (BEC) interacting with the two-mode squeezed coherent state field are discussed. The results show that the compression depth is closely related to the initial compression factor, while the compression duration is related to multiple factors.

Key words: Two level atom; Bose Einstein condensate; two mode squeezed state light field; orthogonal squeezing of light field

Received: 2019-07-01; Accepted: 2019-07-29; Published: 2019-08-01

文章引用：铁成华．玻色 – 爱因斯坦凝聚体与双模压缩相干态光场相互作用系统中光场压缩性质［J］．现代物理进展，2019，1（1）：1–7.
https://doi.org/10.35534/amp.

玻色－爱因斯坦凝聚体与双模压缩相干态光场相互作用系统中光场压缩性质

铁成华

沈阳师范大学，沈阳

邮箱：chtie.00@gmail.com

摘　要：讨论了考虑原子间的相互作用的二能级原子的玻色－爱因斯坦凝聚体（BEC）与双模压缩相干态光场相互作用系统中光场的正交压缩性质。结果表明：压缩深度与初始压缩因子密切相关，而压缩持续时间则与多个因子有关 。

关键词：二能级原子；玻色－爱因斯坦凝聚体；双模压缩态光场；光场正交压缩

收稿日期：2019–07–01；录用日期：2019–07–29；发表日期：2019–08–01

引言

光场和原子的相互作用是现代量子光学研究的中心内容，通过光场和原子的相互作用可以实现光场的压缩，所以研究光场和原子的相互作用系统中光场的压缩性质具有现实意义。文献［1］［2］中皆考虑原子间相互作用，前者讨论的是 V 型三能级原子 BEC 与双模光场相互作用系统的光场压缩性质，后者讨论的是二能级原子 BEC 与单模光场相互作用系统在一定条件下的光场压缩性质，文献［3］中讨论了不考虑原子间相互作用的 V 型三能级原子 BEC 与双模光场相互作用系统的光场压缩性质。本文建立了考虑原子间相互作用的二能级原子 BEC —双模光场相互作用系统的理论模型，讨论了该系统中光场的正交压缩性质。

1　理论模型

研究对象为二能级原子 BEC 与双模光场的相互作用系统，在旋波近似下，系统的哈密顿量（$\hbar=1$）为

$$\begin{aligned} H = {} & \omega_0 b_1^+ b_1 + \omega a_1^+ a_1 + \omega a_2^+ a_2 + \varepsilon(a_1^+ b_0^+ b_1 + a_2^+ b_0^+ b_1 + a_1 b_0 b_1^+ + a_2 b_0 b_1^+) + \\ & \Omega(b_0^+ b_0^+ b_0 b_0 + b_0^+ b_1^+ b_0 b_1 + b_1^+ b_0^+ b_1 b_0 + b_1^+ b_1^+ b_1 b_1) \end{aligned} \tag{1}$$

式中 ω_0 为原子基态和激发态之间的本征跃迁频率，b_{+i} 和 b_i 分别为原子基态（i =0）和激发态（i =1）的产生算符和湮没算符，ω 为光场的圆频率，a_i^+ 和 a i（i =1，2）分别为第 i 模光场的产生算符和湮没算符，ε 表征光场与原子相互作用的强度，Ψ 表征原子间相互作用的强度。

在弱光场的条件下采用 Bogoliubov 近似，分别用 $\sqrt{N_c}e^{-i\theta}$ 和 $\sqrt{N_c}e^{i\theta}$ 替代系统哈密顿量中的 b_0 和 b_0^+，略去含 $b_1+b_1+b_1b_1$ 的项，记 $b_1=b$，$b_1^+=b^+$，将系统的哈密顿量简化为

$$H = \omega_0 b^+ b + \omega a_1^+ a_1 + \omega a_2^+ a_2 + \varepsilon\sqrt{N_c}(a_1^+ b e^{i\theta} + a_2^+ b e^{i\theta} + a_1 b^+ e^{-i\theta} + a_2 b^+ e^{-i\theta}) + \Omega(N_c^2 + 2N_c b^+ b) \tag{2}$$

再将系统的哈密顿量改写为

$$H = (\omega_0 + 2N_c\Omega) b^+ b + \omega a_1^+ a_2 + \omega a_2^+ a_2 + \varepsilon\sqrt{N_c}(a_1^+ b e^{i\theta} + a_2^+ b e^{i\theta} + a_1 b^+ e^{-i\theta} + a_2 b^+ e^{-i\theta}) + N_c^2\Omega \tag{3}$$

从而反映出 BEC 中原子间相互作用对光场 –BEC 系统的影响。在共振条件（$\omega=\omega_0$）下，求解系统的动力学方程（Heisenberg 方程）

$$i\dot{a}_1 = [a_1, H] = \omega a_1 + \varepsilon\sqrt{N_c}\,b e^{i\theta} \tag{4}$$

$$i\dot{a}_2 = [a_2, H] = \omega a_2 + \varepsilon\sqrt{N_c}\,b e^{i\theta} \tag{5}$$

$$i\dot{b} = [b, H] = \varepsilon\sqrt{N_c}\,e^{-i\theta}(a_1 + a_2) + (\omega_0 + 2N_c\Omega)b \tag{6}$$

求解结果为：

$$a_1(t) = \left\{\frac{e^{-i(\omega+N_c\Omega)t}}{2\gamma}[\gamma\cos(\gamma t) + iN_c\Omega\sin(\gamma t)] + \frac{e^{-i\omega t}}{2}\right\}a_1(0) + \left\{\frac{e^{-i(\omega+N_c\Omega)t}}{2\gamma}[\gamma\cos(\gamma t) + iN_c\Omega\sin(\gamma t)] - \frac{e^{-i\omega t}}{2}\right\}a_2(0) + \frac{e^{-i(\omega+N_c\Omega)t}}{2\gamma}[-i\sqrt{N_c}\varepsilon\sin(\gamma t)e^{i\theta}]\,b(0) \tag{7}$$

$$a_2(t) = \left\{\frac{e^{-i(\omega+N_c\Omega)t}}{2\gamma}[\gamma\cos(\gamma t) + iN_c\Omega\sin(\gamma t)] + \frac{e^{-i\omega t}}{2}\right\}a_1(0) + \left\{\frac{e^{-i(\omega+N_c\Omega)t}}{2\gamma}[\gamma\cos(\gamma t) + iN_c\Omega\sin(\gamma t)] + \frac{e^{-i\omega t}}{2}\right\}a_2(0) + \frac{e^{-i(\omega+N_c\Omega)t}}{2\gamma}[-i\sqrt{N_c}\varepsilon\sin(\gamma t)e^{i\theta}]\,b(0) \tag{8}$$

$$b(t) = \frac{e^{-i(\omega+N_c\Omega)t}}{\gamma}\{-i\sqrt{N_c}\varepsilon\sin(\gamma t)\}e^{-i\theta}[a_1(0) + a_2(0)] + [\gamma\cos(\gamma t) - iN_c\Omega\sin(\gamma t)]\,b(0)\} \tag{9}$$

式中$\gamma = \sqrt{N_c(2\varepsilon^2 + N_c\Omega^2)}$。

2　双模光场压缩性质

设初始时刻激发态为真空态，所有原子均处于基态并发生 BEC。系统的初始态矢可表示为

$$|\psi(0)\rangle = |\beta\rangle_0 \otimes |0\rangle_1 \otimes |\alpha_1, \alpha_2, \xi\rangle \tag{10}$$

式中$|\beta\rangle_0$为原子基态湮没算符 b_0 的本征态，$|0\rangle_1$表示初始时刻原子的激发态为真空态，$|\alpha_1, \alpha_2, \xi\rangle$为双模光场压缩态，可表示为$|\alpha_1, \alpha_2, \xi\rangle = D_1(\alpha_1)D_2(\alpha_2)S_{12}(\xi)|0\rangle$，$D_1(\alpha_1)$、$D_2(\alpha_2)$为平移算符，$S_{12}(\xi)$为压缩算符，其中$D_1(\alpha_1) = \exp(\alpha_1 a_1^+ - \alpha_1^* a_1)$，$D_2(\alpha_2) = \exp(\alpha_2 a_2^+ - \alpha_2^* a_2)$，$S_{12}(\xi) = \exp(\xi^* a_1 a_2 - \xi a_1^+ a_2^+)$，且有$\alpha = \sqrt{n}e^{i\eta}$，$\xi = re^{i\varphi}$，$n$ 为初始光场的平均光子数，r 为光场的初始压缩因子，ϕ 为压缩角。

光场的两个缓变的正交相位算符：

$$X_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(a_1 + a_1^+ + a_2 + a_2^+) \tag{11}$$

$$X_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}i}(a_1 - a_1^+ + a_2 - a_2^+) \tag{12}$$

X_1，X_2 满足下列对易关系

$$[X_1, X_2] = \frac{i}{2} \tag{13}$$

相应的不确定关系为：

$$(\Delta X_1)^2(\Delta X_2)^2 \geqslant 1/16 \tag{14}$$

引入

$$Q_i = (\Delta X_i)^2 - \frac{1}{4} \quad (i = 1, 2) \tag{15}$$

若在某一状态下，有 $Q_i<0$（i=1，2），则表示光场的第 i 个正交分量的量子噪声被压缩 . 利用（7）~（9）式，可以得到

$$Q_1(t) = -\frac{1}{4}\sinh 2r\left\{\cos[2(\omega + N_c\Omega)t - \varphi]\cos^2(\gamma t) - \frac{N_c^2\Omega^2}{\gamma^2}\cos[2(\omega + N_c\Omega)t - \varphi]\sin^2(\gamma t) + \frac{2N_0\Omega}{\gamma}\sin[2(\omega + N_0\Omega)t - \varphi]\sin(\gamma t)\cos(\gamma t)\right\} + \frac{1}{2}\sinh^2 r + \frac{N_0\varepsilon^2}{8\gamma^2}\sin^2(\gamma t) - \frac{N_0\varepsilon^2}{2\gamma^2}\cosh 2r\sin^2(\gamma t) \tag{16}$$

$$Q_2(t) = \frac{1}{4}\sinh 2r\left\{\cos[2(\omega + N_c\Omega)t - \varphi]\cos^2(\gamma t) - \frac{N_c^2\Omega^2}{\gamma^2}\cos[2(\omega + N_c\Omega)t - \varphi]\sin^2(\gamma t) + \frac{2N_c\Omega}{\gamma}\sin[2(\omega + N_c\Omega)t - \varphi]\sin(\gamma t)\cos(\gamma t)\right\} + \frac{1}{2}\sinh^2 r + \frac{N_c\varepsilon^2}{8\gamma^2}\sin^2(\gamma t) - \frac{N_c\varepsilon^2}{2\gamma^2}\cosh 2r\sin^2(\gamma t) \tag{17}$$

从（16）、（17）两式可以看出，当

$$\frac{1}{4}\sinh 2r\left\{\cos[2(\omega + N_c\Omega)t - \varphi]\cos^2(\gamma t) - \frac{N_c^2\Omega^2}{\gamma^2}\cos[2(\omega + N_c\Omega)t - \varphi]\sin^2(\gamma t) + \frac{2N_c\Omega}{\gamma}\sin[2(\omega + N_c\Omega)t - \varphi]\sin(\gamma t)\cos(\gamma t)\right\} > \frac{1}{2}\sinh^2 r + \frac{N_c\varepsilon^2}{8\gamma^2}\sin^2(\gamma t) - \frac{N_c\varepsilon^2}{2\gamma^2}\cosh 2r\sin^2(\gamma t) \tag{18}$$

时，$Q_1<0$，即光场的 X_1 分量可以被压缩，而当

$$-\frac{1}{4}\sinh 2r\left\{\cos[2(\omega + N_0\Omega)t - \varphi]\cos^2(\gamma t) - \frac{N_0^2\Omega^2}{\gamma^2}\cos[2(\omega + N_0\Omega)t - \varphi]\sin^2(\gamma t) + \frac{2N_0\Omega}{\gamma}\sin[2(\omega + N_0\Omega)t - \varphi]\sin(\gamma t)\cos(\gamma t)\right\} > \frac{1}{2}\sinh^2 r + \frac{N_0\varepsilon^2}{8\gamma^2}\sin^2(\gamma t) - \frac{N_0\varepsilon^2}{2\gamma^2}\cosh 2r\sin^2(\gamma t) \tag{19}$$

时，$Q_2<0$，即光场的 X_2 分量可以被压缩。

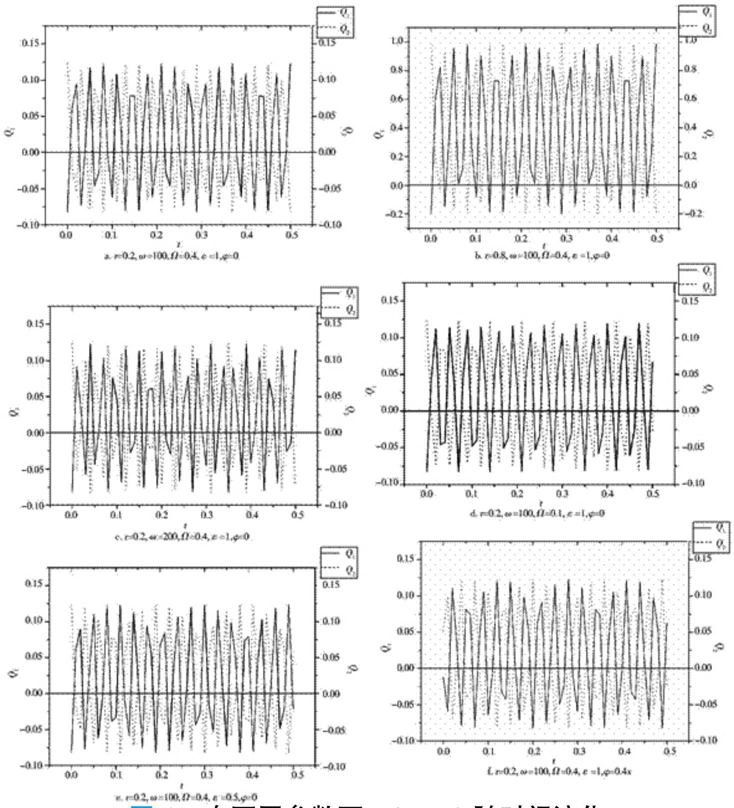

图 1　在不同参数下 $Q1$，$Q2$ 随时间演化

利用（16）、（17），对 Q_1，Q_2 作计算和分析。取 N0 =10^5，t =0 ～ 0.5，其他参数如图 1 所示，得到图 1–a ～ f 的 6 张图。由图 1 可见，光场的两正交分量的涨落均随时间变化。对比图 1–a 和图 1–b 可知，r 变大，光场的两正交分量平均每次压缩持续时间变小，最大压缩深度变大。对比图 1–a 和图 1–c 可知，ω 变大，光场的两正交分量平均每次压缩持续时间变小，但最大压缩深度没变，均为 –0.08。对比图 1–a 和图 1–d 可知，Ψ 变小，光场的两正交分量平均每次压缩持续时间变大，但最大压缩深度没变，均为 –0.08. 对比图 1–a 和图 1–e，可知 ε 变小，光场的两正交分量平均每次压缩持续时间变小，但最大压缩深度没变。对比图 1–a 和图 1–f 两图，可知 ϕ 的变化对光场的两正交分量平均每次压缩持续时间和最大压缩深度没有影响。

3 结论

本文运用全量子理论，在旋波近似和 Bogoliubov 近似下，考虑原子间的相互作用，给出了双模光场与二能级原子 BEC 相互作用系统的哈密顿量，求解了系统的动力学方程，讨论了双模压缩相干态光场与二能级原子 BEC 相互作用系统中光场的正交压缩性质。结果表明：光场的两正交分量的涨落均随时间变化 . 与文献［2］的结果相似，影响最大压缩深度的主要因素为光场的初始压缩因子 r。影响平均每次压缩持续时间的主要因素为 r 、光场的频率 ω 、表征原子间相互作用强度的 Ψ 以及表征光场与原子相互作用强度的 ε 。

参考文献

［1］赵丽云．相互作用原子 BEC 诱导的双模光场压缩特性［J］．太原师范学院学报（自然科学版），2007，6（2）：83–85

［2］周明，方家元，黄春佳．相互作用原子玻色－爱因斯坦凝聚体诱导的光场压缩效应［J］．物理学报，2003，52：1916–1919

［3］周明，黄春佳．V 型三能级原子玻色－爱因斯坦凝聚体与双模压缩光场相互作用系统中光场的压缩特性［J］．物理学报，2002，51：2514–2516