应用数学资讯
2019 年 8 月第 1 卷第 1 期

The solution of shortest path and critical path in directed graph

Liu Qian

Jiangxi Normal University, Nanchang

Abstract: Given a directed graph G, G of two adjacent vertex vi to vj paths can use polynomial vi, vj, and dij remember the edge has a weight, and dij may consist in $\Omega = \{0, 1\}$ within the scope of the solution system of linear equations to determine. The results can be used to solve the shortest path and critical path problems of directed graphs, and the method can also be extended to undirected graphs to solve Hamiltonian roads and circuits, euler roads and circuits and other problems.

Key words: Grdbner base; Reduced; The path; A weight

Received: 2019-08-03; Accepted: 2019-08-20; Published: 2019-08-22

文章引用：刘芊．有向图中的最短路径、关键路径的解决方法探析［J］．应用数学资讯，2019，1（1）：16–28.
https://doi.org/10.35534/ami.

有向图中的最短路径、关键路径的解决方法探析

刘　芊

江西师范大学，南昌

邮箱：liuq_1983@hotmail.com

摘　要：对于一个给定的有向图 G，G 中两个相邻顶点 $v_i \rightarrow v_j$ 的路径可以用多项式 $v_i \rightarrow v_j$ 来表示，并用 d_{ij} 记其边的权值，而 d_{ij} 可由在 $\Omega=\{0, 1\}$ 的范围内解线性方程组来确定。该结果可以用来解决有向图的最短路径、关键路径等问题，并且此方法还可推广到无向图，用来解决哈密顿道路和回路，欧拉道路和回路等问题。

关键词：Grdbner 基；约化；路径；权值

收稿日期：2019–08–03；录用日期：2019–08–20；发表日期：2019–08–22

在计算代数中一个熟知的事实是，图的染色问题可以用对应的多元多项式的性质来刻画，从而利用 Grdbner 基给出纯代数的解决方案。对有向连通图的路径引入一次一元多项式表示，并利用 Grdbner 基理论中的约化方法给出有向连通图中最短路径和关键路径的求法［2］［3］，但是方法只对没有回路和平行边的有向连通图有效，有很大局限性。

1 计算有向图中路径问题的线性代数方法

文章［2］［3］的路径定义，只对没有回路的有向连通图有效。本文给出新定义，对一般有向图都适用（不要求连通）。Grdbner 基理论中用一次多项式对一次多项式进行约化的过程实际上就是线性代数方程组的初等变换［2］［3］，于是便可以得到下面计算有向图 G 中路径问题的一个方法。

1.1 有向图中路径的新定义及优缺点

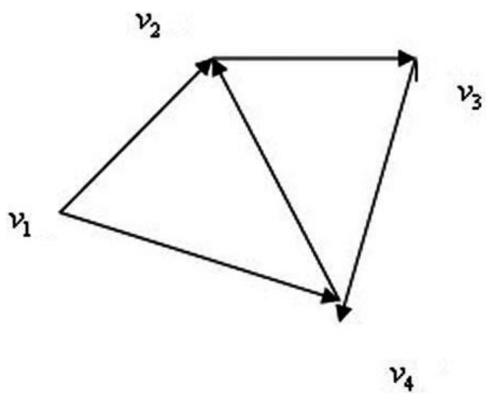

图 1

定义 1 有向图 G 中，v_i，v_j 是相邻顶点，$i \neq j$，从 $v_i \rightarrow v_j$ 的路径表示为：$v_i - v_j$，其边的权值记为：d_{ij}，如图 1。5 条路径分别是：$v_1 - v_2$，$v_2 - v_3$，$v_3 - v_4$，$v_1 - v_4$，$v_4 - v_2$，其所对应的 5 个权值分别是：d_{12}，d_{23}，d_{34}，d_{14}，d_{42}。优点是路径多项式来表示便于理解，方便运算，其中权值 d_{ij} 与边一一对应，又与多项式一一对应，又有独立性，便于分离运算，同时还可知多项式与边也是一一对应的；缺点是自循环和平行边不能用多项式表示。

1.2 有向图中的定理及推论

定理 1　设 G 是有个 n 顶点 v_1，v_2，K，v_n 的有向图，令 A 为所有相邻顶点对（v_k，v_l）所在给出的多项式集合，$k \neq l$，d_{kl} 为已知权值，A={$L_{kl}=v_k-v_l$ 路径方向为 $v_k \rightarrow v_l$，$k \neq l$}，任意两个顶点 v_i，v_j，考虑等式 $v_i-v_j=\sum x_{kl}L_{kl}$，并记为（＊），比较两端系数后得关于 x_{kl} 的方程组 UX= ∧ ，并记为（ Ⅰ ），令 Ω={0，1}（注 1 和 2），在 Ω 范围内计算方程组（ Ⅰ ）的解（注 3），则以下结论成立：

（i）若方程组（ Ⅰ ）无解，则 v_i，v_j 之间没有通路；

（ii）若方程组（ Ⅰ ）有解，则 v_i，v_j 之间必有通路；

（iii）若 v_i，v_j 之间有通路，则方程组（ Ⅰ ）有解　，且每条通路都有唯一解与之对应；

（iv）若方程组（ Ⅰ ）的某个解有若干条通路与其对应，则每条通路的所有边权值的和均相等。

证明：

（i）由于方程组（ Ⅰ ）无解，所以等式（＊）不成立，即多项式 v_i-v_j 不能表示成若干个 L_{kl} 的和的形式，所以不存在若干个边使 v_i，v_j 连通，即 v_i，v_j 之间没有通路。

（ii）由于方程组（ Ⅰ ）有解，所以必存在若干个 x_{kl} 使等式（＊）成立，即多项式 v_i-v_j 可以表示成若干个 L_{kl} 的和的形式，所以存在若干个边使 v_i，v_j 连通，即 v_i，v_j 之间必有通路。

（iii）由于 v_i，v_j 之间有通路，即存在若干个边使 v_i，v_j 连通，所以多项式 v_i-v_j 可以表示成若干个 L_{kl} 的和的形式，即必存在若干个 x_{kl} 使等式（＊）成立，所以方程组（ Ⅰ ）有解；

等式（＊）中每个系数 x_{kl} 都与一个多项式一一对应，继而与每条边也一一对应，每条通路都是由若干个依次连接的边组成，所以对每条通路来说，存在一组取值唯一确定的 x_{kl} 使等式（＊）成立，此组 x_{kl} 恰是方程组（ Ⅰ ）的一个解。

（iv）由于此解中的每个 x_{kl} 的取值都是唯一确定的，而每个系数 x_{kl} 都与一个多项式一一对应，继而与每条边也一一对应，所以此解决定了若干条边，又

由于此解对应若干条通路，通路是由边依次连接而成，所以次若干条通路是由相同的边组成，又已知每条边都与其权值 d_{ij} 一一对应，所以每条通路所有边权值的和均相等。推论若有向图 G 中没有回路，则方程组

（Ⅰ）的解与 G 中所求通路是一一对应的。

证明：

（⇐）由定理 1（iii）可知：每条通路都与唯一的解对应，充分性是显然的。

（⇒）由定理 1（ii），每个解至少包含一条通路，又由于 G 中没有回路，所以每个解中所有非零 x_{kl}（即为 1）所对应边的连接方式只有一种，所以每个解有且只有一条通路与之对应。

1.3 权值计算公式

设 d_{ij} 为顶点 v_i，v_j 之间通路的边权值的和，由路径的定义 1 和定理 1 可得，

注：

1 本文有向图中各个概念之间的关系：

2 $\Omega=\{0, 1\}$，由于通路是由边依次连接而成，图中所有的边要么在此通路中，要么不在；某条边若在通路中，其所对应 x_{kl} 的取值为 1，否则取值为 0；

3 方程组（Ⅰ）的解指的是所有在 $\Omega=\{0, 1\}$ 范围内的整数解。

2 计算无向图中路径问题的线性代数方法

计算方法可以推广到无向图，由于无向图中的边没有方向，所以在有向图中适用的路径的多项式定义要做些修改，计算方法不变。

2.1 无向图中路径的新定义及优缺点

定义 2 无向图 G 中，v_i，v_j 是相邻顶点，ipj，v_i，v_j 之间路径表示为：v_i–v_j，其边的权值记为：d_{ij}，如图 2。

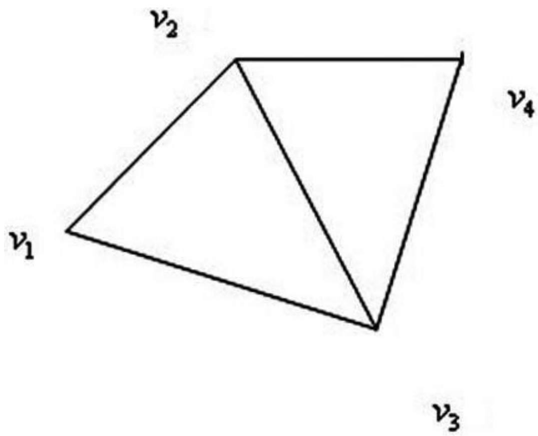

图 2

5 条路径分别是：v_1-v_2，v_2-v_3，v_3-v_4，v_1-v_3，v_2-v_4，其所对应的 5 个权值分别是：d_{12}，d_{23}，d_{34}，d_{13}，d_{24}。优点是路径多项式来表示便于理解，方便运算，其中权值 d_{ij} 与边一一对应，又与多项式一一对应，又有独立性，便于分离运算，同时还可知多项式与边也是一一对应的；缺点是自循环和重边不能用多项式表示。

2.2 无向图中的定理

定理 2　设 G 是有 n 个顶点 v_1，v_2，K，v_n 的无向图，令 A 为所有相邻顶点对（v_k，v_l）所在给出的多项式集合，kpl，d_{kl} 为已知权值，A={$L_{kl}=v_k-v_l$ v_k、v_l 为相邻顶点，kpl}，$v_i-v_A x_{kl}L_{kl}+\sum y_{kl}(-L_{kl})$ 任意两个顶点 v_i、v_j，ipj，$L_{kl}\in A$ 考虑等式 $x_{kl}L_{kl}+\sum(-y_{kl})L_{kl}$，令 $=\sum A\ L_{kl}\in A\ L_{kl}\in A\ (x_{kl}-y_{kl})\ L_{kl}z_{kl}=x_{kl}-y_{kl}$，则 $v_i-v_j=\sum z_{kl}L_{kl}$ 并记为 $L_{kl}\in A$（＊＊）。

比较两端系数后得关于 x_{kl} 的方程组 UX= ∧，并记为（Ⅱ），令 Ω={0，1 –1}（注 5），在 Ω 范围内计算方程组（Ⅱ）的解（注 6），则以下结论成立：

（i）若方程组（Ⅱ）无解，则 v_i，v_j 之间没有通路，且 G 不是连通图；

（ii）若方程组（Ⅱ）有解，则 v_i，v_j 之间必有通路；

（iii）若 v_i，v_j 之间有通路，则方程组（Ⅱ）有解，且每条通路都有唯一解与之对应；

（iv）若方程组（Ⅱ）的某个解有若干条通路与其对应，则每条通路的所

有边权值的和均相等。

证明：（i）、（ii）、（iii）、（iv）的证明与定理 1 中（i）、（ii）、（iii）、（iv）的证明完全相同，其中

（i）还可以用来判断图的连通性。

2.3　权值计算公式

设 d_{ij} 为顶点 v_i，v_j 之间通路的边权值的和，由路径的定义 2 和定理 2 可得，$d_{ij}=\sum x_{kl}$

$x_{kl}\in\Psi\ d_{kl}$。

注：

4　本文无向图中各个概念之间的关系：

$$\text{路径}(v_i, v_j\text{相邻}\ P_j) \overset{\text{一一}}{\underset{\text{对应}}{\longleftrightarrow}} \text{边} \overset{\text{一一}}{\underset{\text{对应}}{\longleftrightarrow}} \text{权值}\ d_{ij} \overset{\text{一一}}{\underset{\text{对应}}{\longleftrightarrow}} \text{多项式}\ v_i - v_j \overset{\text{一一}}{\underset{\text{对应}}{\longleftrightarrow}} \text{系数}\ x_{ij}$$

5　$\Omega=\{0, 1, -1\}$，由上节中的注 2 可知：$x_{kl}\in\{0, 1, \}$，且在每条通路中，每条边只能出现一次，即 $x_{kl}\times y_{kl}\neq 1$，所以 $z_{kl}=x_{kl}-y_{kl}\in\{0, 1, -1\}$。

6　方程组（Ⅱ）的解指的是所有在 $\Omega=\{0, 1, -1\}$ 范围内的整数解。

3　定理 1 和 2 的权值公式及推论的应用

定理 1 和 2 及推论的内容和证明过程包含了图中通路的计算方法在内，然后利用两个权值计算公式，根据实际问题的条件，找出适合的解，继而确定通路；在下面的应用中，对实际问题将给出详细的计算方法。

3.1　最短路径

包括某两个顶点之间的最短路径、某个顶点到其他顶点的最短路径、任意两个顶点之间的最短路径。

3.1.1　有向图中的最短路径

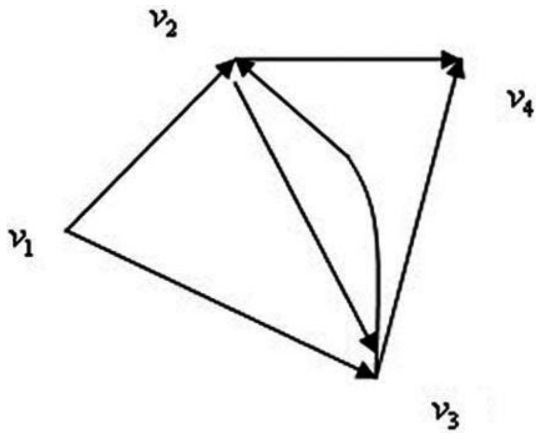

图 3

计算方法：根据定理 1，建立和求解方程组，在 Ω={0，1} 范围内有有限个解，代入 1.3 中的权值公式，分别计算出 d_{ij} 比较大小，最小值所确定的路径就是最短路径。例 1 如图 3。

计算 v_1 到 v_4 的最短路径，权值 d_{ij} 为路径长度。由于图 P_1 中有回路，所以文章［2］和［3］中应用 Grdbner 基的约化方法，不能解决此问题；本文中的方法完全可以解决。$v_1 - v_4 = \sum x_{kl}L_{kl}L_{kl} \in A$

根据定理 1 可得等式 $=x_{12}(v_1-v_2)+x_{13}(v_1-v_3)+x_{32}(v_3-v_2)+x_{23}(v_2-v_3)+x_{34}(v_3-v_4)+x_{24}(v_2-v_4)$，比较两端系数可得方程组

$$\begin{cases} x_{12}-x_{13}=1 \\ -x_{12}-x_{32}+x_{23}+x_{24}=0 \\ -x_{13}-x_{23}+x_{32}+x_{34}=0 \\ -x_{34}-x_{24}=-1 \end{cases}, \quad \Omega=\{0,\ 1\}\text{在解方程}$$

组，得到 6 组解，（记解为（x_{12}，x_{13}，x_{23}，x_{24}，x_{32}，x_{34}））即 {（1，0，1，0，0，1），（1，0，0，1，0，0），（1，0，1，1，1，0），（0，1，0，0，0，1），（0，1，0，1，1，0），（0，1，1，0，1，1，）}

根据 1.3 中的权值公式 $d_{ij}=\sum x_{kl}d_{kl}$，分别计算 d_{ij} 出比较大小，最小值所确定的路径就是最短路径。

3.1.2　无向图中的最短路径

计算方法：根据定理 2，建立和求解方程组，在 Ω={01，1 −1} 范围内有有

限个解，代入 2.3 中的权值公式，分别计算出 d_{ij} 的值比较大小，最小值所确定的路径就是最短路径。例 2 如图 2。

计算 v_1 到 v_4 的最短路径，权值 d_{ij} 为路径长度。由于此图为无向图，所以应用 Grdbner 基的约化方法 [2] [3]，不能解决此问题；本文中的方法完全可以解决。

$$v_1 - v_4 = \sum_{L_{kl} \in A} z_{kl} L_{kl}$$

根据定理 2，$= z_{12}(v_1 - v_2) + z_{13}(v_1 - v_3) + z_{23}(v_2 - v_3) + z_{34}(v_3 - v_4) + z_{24}(v_2 - v_4)$，比较

两端系数可得方程组，$\begin{cases} z_{12} + z_{13} = 1 \\ -z_{12} + z_{23} + z_{24} = 0 \\ -z_{13} - z_{23} + z_{34} = 0 \\ -z_{34} - z_{24} = -1 \end{cases}$，在 $\Omega=\{0, 1, -1\}$ 解方程组，得到 4 组解（记解为（z_{12}，z_{13}，z_{23}，z_{24}，z_{34}））,即（1，0，0，1，0），（1，0，1，0，1），（0，1，0，0，1），（0，1，−1，1，0）。

根据 2.3 中的权值公式 d_{ij} z_{kl} d_{kl}，分别计算出 d_{ij} 比较大小，最小值所确定的路径就是最短路径。

3.2 关键路径

带权有向连通图，一般约定没有回路和平行边，此图有且只有一个引入次数为 0 的顶点，记为始点；有且只有一个引出次数为 0 的顶点，记为终点。关键路径指的是从始点到终点边权值的和最大的路径。

计算方法：根据定理 1，建立和求解方程组，在 $\Omega=\{0, 1\}$ 范围内有有限个解，又由推论可知，解与路径一一对应，把每个解都代入 1.3 中的权值公式，分别计算出 d_{ij} 比较大小，最大值所确定的路径就是关键路径。例 3 如图 4。

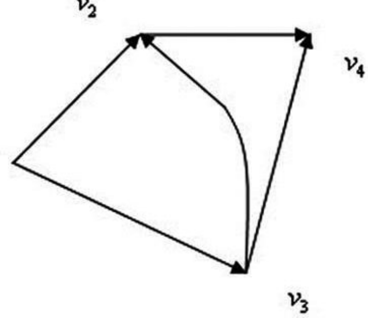

图 4

计算 v_1 到 v_4 的关键路径，权值 d_{ij} 为路径长度、时间、费用等。$v1-v4=\sum x_{kl}L_{kl}L_{kl}\in A$

根据定理 1 可得等式 $=x_{12}(v_1-v_2)+x_{13}(v_1-v_3)+x_{32}(v_3-v_2)+x_{34}(v_3-v_4)+x_{24}(v_2-v_4)$，比较两端系数可得方程组 $\begin{cases} x_{12}+x_{13}=1 \\ -x_{12}-x_{32}+x_{24}=0 \\ -x_{13}+x_{32}+x_{34}=0 \\ -x_{34}-x_{24}=-1 \end{cases}$，在 $\Omega=\{0,1\}$ 解方程组，得到 3 组解（记解为 $(x_{12},x_{13},x_{24},x_{32},x_{34})$），即 $\{(1,0,1,0,0),(0,1,0,0,1),(0,1,0,1,1)\}$ 根据 1.3 中的权值公式 $d_{ij}=\sum x_{kl}d_{kl}x_{kl}\in\Psi$，分别计算出 d_{ij} 比较大小，最大值所确定的路径就是关键路径。

3.3 哈密顿道路和回路

本文方法可以用来判断图中任意两点之间是否存在哈密顿道路并找出，也可以用来寻找图中的哈密顿回路（注 7）。无向图 G 有 n_1 个顶点，n_2 条边。

3.3.1 哈密顿道路

从某个顶点出发，经过所有顶点（有且只有一次）的初级道路。计算方法：根据定理 2，令 $v_i-v_j=\sum z_{kl}L_{kl}\in AL_{kl}$ 中 $i\neq j$，比较两端系数，可得方程组 $UZ=\Lambda$，并求解，在 $\Psi=\{0,1,-1\}$ 范围内有有限个解。若一个解中非零坐标（即为 1 或 -1）个数的和为 n_1-1，且此解所对应的边能依次连接成一条完整的通路，即为哈密顿道路。

3.3.2 哈密顿回路

从某个顶点出发，经过所有顶点（有且只有一次）的初级回路。

计算方法：根据定理 2，令 $v_i-v_j=L_{kl}\sum\in Az_{kl}L_{kl}$ 中 $i=j$，比较两端系数，可得方程组 $UZ=0$，并求解，在 $\Omega=\{01,1-1\}$ 范围内有有限个解。若一个解中非零坐标（即为 1 或 -1）个数的和为，且此解所对应的边能依次连接成一条完整的回路，即为哈密顿回路，同时还可以通过计算边权值的和给出最优的哈密顿回路。

注 7　若方程组的每个解所有非零坐标个数的和均不为 n_1-1，则此图中 v_i，

https://doi.org/10.35534/ami.

v_j 之间不存在哈密顿道路；若方程组的每个解所有非零坐标个数的和均不为 n_1，则此图中不存在哈密顿回路。

例 4（1）定义 2 中的图 2，计算 v_1 到 v_4 的哈密顿道路。根据方程组的解和无向图中哈密顿道路的计算方法可知，（1，0，1，0，1）和（0，1，1，1，0）所对应的边可分别依次连接成完整的通路，两条都是哈密顿道路，进一步还可以根据边权值的和找出最优的哈密顿道路。例 4（2）如图 5。

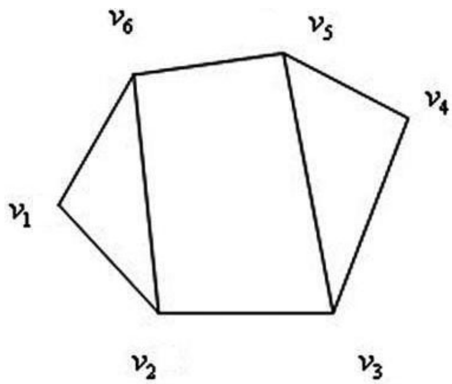

图 5

找出此图中所有的哈密顿回路，若有多条，给出最优的回路。

根据定理 2 和计算方法可得：

$$0 = z_{12}(y_1 - y_2) + z_{23}(y_2 - y_3) + z_{34}(y_3 - y_4) + z_{45}(y_4 - y_5) + z_{56}(y_5 - y_6) + z_{16}(y_1 - y_6), + z_{26}(y_2 - y_6) + z_{35}(y_3 - y_5)$$

整理后得方程组 $\begin{cases} z_{12} + z_{16} = 0 \\ -z_{12} + z_{23} + z_{26} = 0 \\ -z_{23} + z_{34} + z_{35} = 0 \\ -z_{34} + z_{45} = 0 \\ z_{56} - z_{35} - z_{45} = 0 \\ -z_{16} - z_{56} - z_{26} = 0 \end{cases}$ 在 $\Omega=\{0，1，-1\}$ 解方程组，得到 16 组解（记解为（z_{12}，z_{16}，z_{23}，z_{26}，z_{34}，z_{35}，z_{45}，z_{56}）），即{（−1，1，−1，0，−1，0，−1，−1），（0，0，−1，1，0，−1，0，1），（0，0，0，0，1，−1，1，0），（0，0，1，−1，1，0，1，1），（0，0，0，0，−1，1，−1，0），（0，0，−1，1，−1，0，−1，−1），（1，−1，0，1，0，0，0，0），（1，−1，1，0，0，1，0，1），（1，−1，1，0，1，0，1，1），（−1，1，−1，0，0，−1，0，−1），

（1，–1，0，1，–1，1，–1，0），（–1，1，0，–1，0，0，0，0），（1，–1，0，1，1，–1，1，0），（–1，1，0，–1，1，–1，1，0），（–1，1，0，–1，–1，1，–1，0），（0，0，1，–1，0，1，0，1）} 考察所有解，可知：（1，–1，1，0，1，0，1，1）和（–1，1，–1，0，–1，0，–1，–1）所确定的两条回路都是哈密顿回路，并且这两个回路都由相同的边组成，只是顺序相反。

3.4 欧拉道路和回路

本文方法可以用来判断图中任意两点之间是否存在欧拉道路并找出，也可以用来寻找图中的欧拉回路（注 8）。无向图 G 有 n_1 个顶点，n_2 条边。

3.4.1 欧拉道路

从某个顶点出发，经过所有边（有且只有一次）的简单道路。计算方法：根据定理 2，令 $v_i - v_j = \sum_{Lkl \in A} z_{kl}$

L_{kl} 中 $i \neq j$，比较两端系数，可得方程组 UZ= ∧，并求解，在 Ω={0，1，–1} 范围内有有限个解。若一个解中非零坐标（即为 1 或 –1）个数的和为 n2，且此解所对应的边能依次连接成一条完整的通路，即为欧拉道路。

3.4.2 欧拉回路

从某个顶点出发，经过所有边（有且只有一次）的简单回路。计算方法：根据定理 2，令 $v_i - v_j = \sum_{Lkl \in A} z_{kl}$

L_{kl} 中 i=j，比较两端系数，可得方程组 UZ=0，并求解，在 Ω={0，1，–1} 范围内有有限个解。若一个解中非零坐标（即为 1 或 –1）个数的和为 n_2，且此解所对应的边能依次连接成一条完整的回路，即为欧拉回路。

注 8　若方程组的每个解所有非零坐标个数的和均不为 n_2，则此图中 v_i，v_j 之间不存在欧拉道路；若方程组的每个解所有非零坐标个数的和均不为 n_2，则此图中不存在欧拉回路。

例 5（1）定义 2 中的图 2，计算 v_1 到 v_4 的欧拉道路。根据方程组的解和无向图中欧拉道路的计算方法可知，方程组的每个解中非零坐标个数的和都小于 n_2，所以此图中 v_i，v_j 之间不存在欧拉道路。

在例 4（2）中，根据方程组的解和无向图中欧拉回路的计算方法可知，方

程组的每个解中非零坐标个数的和都小于 n_2，所以此图中不存在欧拉回路。

本方法也可以用来解决图论中的旅行商、邮路等其他路径问题，但是要根据实际条件做些调整。本方法的要点是建立和求解方程组，然后根据解和通路的关系、权值的比较，得到所需结果。

参考文献

[1] 刘木兰．Grdbner 基理论及其应用［M］．北京：科学出版社，2000.

[2] 陈小松，彭丰富．Grdbner 基理论在最短路径问题中的应用［J］．中南工业大学学报，2002，33（6）：1-3.

[3] 赵雪芝，陈小松．关键路径新求法［J］．贵州大学学报，2002，19（4）：1-4.

[4] 张树功，雷娜，刘停战．计算机代数基础［M］．北京：科学出版社，2005.

[5] 吴文俊．数学机械化［M］．北京：科学出版社，2003.

[6] 求是科技．Matlab7．0［M］．北京：人民邮电出版社，2006.

[7] 卢开澄，卢华明．图论及其应用［M］．北京：清华大学出版社，1995.

[8] 戴一奇，胡冠章，陈卫．图论与代数结构［M］．北京：清华大学出版社，1995.

[9] AXLERS，GEHRINGFW，RIBETKA．Ideals，VarietiesandAlgorithms［M］．Hamburg：springer，2007.