应用数学资讯
2019 年 8 月第 1 卷第 1 期

An analysis of distortion probability measure based on classical probability theory

Yan Bangchun

Qufu Normal University, Qufu

Abstract: Using the method of probability measure in classical probability theory, some properties of a distorted probability measure are given.

Key words: Distortion probability measure; Mode; Supermodel; The pseudo inverse function

Received: 2019-08-09; Accepted: 2019-08-28; Published: 2019-08-30

基于经典概率理论的扭曲概率测度方法探析

严邦春

曲阜师范大学，曲阜

邮箱：bcyancom@qq.com

文章引用：严邦春．基于经典概率理论的扭曲概率测度方法探析［J］．应用数学资讯，2019，1（1）：29–36.
https://doi.org/10.35534/ami.

摘　要：利用经典概率论中的概率测度的方法，给出了一种扭曲概率测度所具有的一些性质。

关键词：扭曲概率测度；次模；超模；伪逆函数

收稿日期：2019-08-09；录用日期：2019-08-28；发表日期：2019-08-30

非可加测度（也称模糊测度，容度）在非线性研究中是一种十分重要的工具。众所周知，在处理随机现象

时，线性数学期望是十分有力的工具，但是还有很多不确定的现象用线性的数学期望是很难解释的，如 Allais 悖论［1］。为了解决线性数学期望在处理这类现象的不足，数学家们引入了非可加测度［2］［3］，进而也就产生了非线性数学期望。

本文研究了一种扭曲概率测度，其是基于 Choquet 定义的非可加测度基础上的，并根据经典概率论中的

概率测度的方法，讨论了它所具有的一些相应的性质。

1　基本概念及相关引理

1.1　集函数的有关概念

定义 1［4］　设 Ψ 是一个非空集合，F 是由 Ψ 的某些子集构成的 σ－代数，μ 为 F 上的一个单调集函数。如果 A，B $\in$ F，A $\cap$ B $\in$ F，A $\cup$ B $\in$ F，

则有 μ（$A \cup B$）$+\mu$（$A \cap B$）$\leqslant$（$\geqslant$）μ（A）$+\mu$（B），则称 μ 是次（超）模集函数；如果 μ 既是次模集函数又是超模集函数，则称 μ 是模函数。

定义 2 [5]　（下方连续性）设 μ 是一个单调集函数，若 $\{A_n: n \geqslant 1\}$ F，$A_n \leftarrow A$（n※ ∞），其中 $A \in F$，有 $\lim_{n※\infty} \mu(A_n) = \mu(\lim_{n※\infty} A_n) = \mu(A)$，则称 μ 为下方连续的。

定义 3 [5]　（上方连续性）设 μ 是一个单调集函数，若 $\{A_n: n \geqslant 1\}$ F，$A_n \uparrow A$（n※ ∞），其中 $A \in F$，并且存在一个 $m \in N$ 使得 $\mu(A_m) <+\infty$，有 $\lim_{n※\infty} \mu\,\mu(A_n) = \mu(\lim_{n※\infty} \mu A_n) = \mu(A)$，则称 μ 为上方连续的。

1.2　Choquet 积分及其性质

定义 4 [4]　（伪逆函数）设 I 是 R 的一个（开，闭，半开）区间，f：I※R 为一个 I 上的递减函数。a=inf{x：x ∈ I}，$J=[\inf_{x\in I} f(x), \sup_{x\in I} f(x)]$，则一定存在一个相应的递减函数 G：J※R 使得 a ∨ sup{x：f（x）>y} ⩽ g（y）⩽ a ∨ sup{x：f（x）⩾ y}。我们称 g 为 f 的伪逆函数，记作 f。特别地，如果 f（x）为 f 的连续点，则 f（f（x））=x。

引理 1 [4]　1）对于一个递减函数 f：R+※R+ 且 limf（x）=0，则 f 的任意一个伪逆 f，$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x)dx$ 有 fdy=dx，
x※ ∞

其中通过对 x>f（0）时，令 f（x）=0，从而把 f 的定义域从 [0，f（0）] 扩张到 R+。

2）对于一个递减函数 f[0，b]※R，0 <b< ∞，则 f 的任意一个伪逆 f 有 $\int_0^b f\ x\,dx = \int_0^\infty f\ y\,dy + (f(y)-b)\,dy$，其中通过对 x>f（0）时，令 f（x）=0；x<f（b）时，令 f（x）=f（b），从而把 f 的定义域从 [f（b），f（0）] 扩张到 R。

定义 5 [4]　设 μ 是一个定义在 F 上单调集函数，X 是可测空间（Ψ，F）上的一个随机变量，我们定义 $G_{\mu,X}(x) := \mu(X>x)$，$x \in R$。那么显然函数 G 是关于 x 的单调减函数。由定义 4 知的 G 伪逆函数 G：[0，μ（Ψ）]※R 如下 sup{x G_μ，X（x）>y} ⩽ G_μ，X（y）⩽ sup{x G_μ，X（x）⩾ y}，y ∈ [0，μ（Ψ）]。

定义 6　（Choquet 积分）设 μ 是一个定义在 F 上的单调集函数，X：

Ψ※R 为一个 F- 可测函数。若 $\int Xd\mu := \int_0^{\mu(\Omega)} \hat{G}_{\mu,X}\,dx$。在 R 中取值，则称这个积分为 X 关于 μ 的 Choquet 积分。

注 1　由引理 1 知，如果 X ⩾ 0，则 $\int Xd\mu := \int_0^{\mu(\Omega)} \hat{G}_{\mu,X}\,dx$；如果 μ（Ψ）< ∞，则 $\int Xd\mu := \int_0^{\mu(\Omega)} \hat{G}_{\mu,X}\,dx + \int G_{\mu,X}\ x - \mu\ \Omega\,dx$。特别地，如果 μ 为概率测度 P，X 为一个随机变量，则有 $\int Xd\mu := \int_0^{\mu(\Omega)} \hat{G}_{\mu,X}\,dx + \int_{-\infty}^{0} G_{P,X}\ x - 1\,dx$。

注 2　若 a>1，我们记 MX：$=G_{P,X}$ X–MX dP。当 a=2 时，MX 简记为 MX，并称

之为 X 的中位数；τ_X^2 简记为 τ_X，并称之为 X 的绝对偏差的平均值。

引理 2 [4]　（Choquet 积分性质）设 μ 是一个定义在集系 S 2^{Ψ} 上的单调集函数，其中 2^{Ψ} 为 Ψ 的所有子集构成的集族。X，Y：Ψ※R 为 S- 可测函数，则

1）$\int I_A d\mu = \mu(A)$，A ∈ S；　　2）$\int cXd\mu = c\int Xd\mu$，c ⩾ 0；

3）如果 X ⩽ Y，则 $\int Xd\mu \leqslant \int Yd\mu$；4）$\int (X+c) \int d\mu = \int Xd\mu + c\mu(\Psi)$，c ∈ R。

1.3　扭曲概率测度与积分的定义

定义 7　令 P 为定义在测度空间（Ψ，F）上的概率测度。γ[0，1]※[0，1]，其为一单调增加的可测函数，且有 γ（0）=0，γ（1）=1。则定义 μ：= γ P，即 A ∈ F，μ（A）=（γ P）（A）= γ（P（A）），称其为测度空间（Ψ，F）上的一个扭曲概率测度，其中 γ 为相应的扭曲。扭曲概率测度 μ 是一种非可加的概率测度。

定义 8　测度空间（Ψ，F）上的可测函数 X 关于扭曲概率测度 μ 的 Choquet 积分为 $\int Xd\mu := \int \hat{G}_{\mu,X}\ x\,dx$，从而可由注 1 知 $\int \hat{G}_{\mu,X}\ x \int \hat{G}_{\mu,X}\ x - \int Xd\mu :=dx+dx$。

下面主要讨论扭曲概率测度与相应的 Choquet 积分的一些性质。

2 主要结果

定理 1 设 μ 为一扭曲概率测度。若 γ 为一凹（凸）函数，则 μ 为次模（超模）集函数。

证明 令 $A, B \in F$, $a: =P(A)$, $b: =P(B)$, $c: =P(A \cap B)$, $d: =P(A \cup B)$。则 $c \leqslant a \leqslant b \leqslant d$。由概率测度 P 的模性，即 $P(A \cup B)+P(A \cap B)=P(A)+P(B)$，可知 $c+d=a+b$，进而有 $a-c=d-b$。再由 γ 是凹函数知 $\gamma(d)-\gamma(b) \leqslant \gamma(a)-\gamma(c)$。从而有 $\gamma(c)+\gamma(d) \leqslant \gamma(a)+\gamma(b)$，即 $\mu(A \cap B)+\mu(A \cup$ d–b a–cB$) \leqslant \mu(A)+\mu(B)$，故 μ 为一次模集函数。

同理可证，若 γ 为一凸函数，则 μ 为超模集函数。

定理 2 1）μ 为模的当且仅当 μ 为可加的；2）μ 为 $\sigma-$可加的当且仅当 μ 为可加的且下方连续。

证明 1）$A, B \in F$, $A \cap B \in F$, $A \cup B \in F$，由 μ 为模的可知 $\mu(A \cup B)+\mu(A \cap B)=\mu(A)+\mu(B)$。再若 $A \cap B=\Upsilon$，而 $\Upsilon \in F$。则有 $\mu(A \cup B)=\mu(A)+\mu(B)$，从而 μ 为可加的；另一方面，若 μ 为可加的，即

$A, B \in F$, $A \cap B=\Upsilon$, $A \cup B \in F$，则有 $\mu(A \cup B)=\mu(A)+\mu(B)$。对于 $A, B \in F$, $A \cap B \in F$, $A \cup B \in F$, $\mu(A \cup B)=\mu(A \cup (B-A \cap B))=\mu(A)+\mu(B-A \cap B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A \cap B)$，故有 $\mu(A \cup B)+\mu(A \cap B)=\mu(A)+\mu(B)$，从而 μ 为模的。

2）μ 为 $\sigma-$可加的，即 $A_n \in F$, n=1，2，…，两两不交，F，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$ 有 $\mu \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot A_n$。令 $A_3 =A_4=\cdots=$，则有 A_1, $A_2 \in F$, $A_1 \cap A_2 =$, $\mu(A_1 \cup B_1)=\mu(A_1)+\mu(B_1)$，即 μ 为可加的；若令 $A_0 =\Upsilon$, A_n

$\in F$, $n \in N$, $A_n \leftarrow A_n$，则有 $\lim_{n※\infty} \mu(A_n) =\lim_{n※\infty} \sum_1 \mu(A_k A_{k-1}) = \sum_{k=1} \mu(A_k A_{k-1})$ $(A_k A_{k-1})$

An），即 μ 为下方连续的。另一方面，$A_n \in F$, n=1，2，…，两两不交，

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$。令 $B_1 =A_1$, $B_2 =A_1 \cup A_2$, $\cdots$, $B_k=A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_k$, $\cdots$, $B_k \in F$, $k=1, 2, \cdots$,

$B_k \leftarrow \uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 由 μ 为可加的且下方连续，可知 $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)$
$=\lim_{n\to\infty}\mu(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)$ 可加的。

定理 3 （极限性质）对于 F 中任何不降集列 $\{A_n\}$（即 $A_n \in F$，且 $A_n \leftarrow$）且若 γ 为一连续的单调增加的可测函数。则有 lim（γ P）（A_n）=（γ P）（∪（∞）A_n）。同理对于 F 中任何不升集列 $\{A_n\}$（即 $A_n \in F$，且 $A_n \uparrow$）且 n※ ∞ n=1 存在 m ∈ N 使（γ P）（A_m）< ∞。则有 $\lim_{n※\infty}$（γ P）（An）=（γ P）$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$。

证明 由概率测度 P 的上、下连续性可知

$\lim_{n※\infty}$（γ P）（$\gamma = \lim_{n\to\infty}\gamma\ P\ A_n = \gamma\ \lim_{n\to\infty} P(A_n = \gamma\ P\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = P$）；
$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$\lim_{n※\infty}$（γ P）（A_n）$=\lim_{n※\infty}$ γ（P（A_n））=γ（$\lim_{n※\infty}$ P（A_n））=γ（P（n= ∩ $_1$ A_n））=（γ P）（n= ∩ $_1$ A_n）。

注 3 若 γ_n（x），γ（x）分别为 [0，1] 上的扭曲函数列与扭曲函数，一定存在满足如下关系的函数列 γ_n（x）与极限函数 γ（x），$\lim_{n※\infty}$ γ_n（P（A））=γ（P（A）），A ∈ F。

定理 4 若 A，B ∈ 2^{Ψ}，则有 $\int(1_A+1_B)\,d\mu=\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)$。

证明 由定义 8 知

$$G_{\mu,1_A+1_B}(t)=\mu(1_A+1_B>t)=\begin{cases}0, & t\geq 2\\ \mu(A\cap B), & 1\leq t<2\\ \mu(A\cup B), & 0\leq t<1\\ \mu(\Omega), & t<0\end{cases}$$

因此，由定义 8 及注 1 可知，A，B ∈ 2^{Ψ}，$\int(1_A+1_B)\,d\mu=\int_0^{\infty}G_{\mu,1_A+1_B}(t)$
$dt=\int_0^2 G_{\mu,1_A+1_B}(t)\,dt=\int_0^1\mu(A\cup B)\,dt+\int_1^2\mu(A\cap B)\,dt=\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)$。

定理 5 设 a>1，扭曲函数 γ（t）：=1 ∧ at，t ∈ [0，1]。μ：=γ P，X，Y 为测度空间（Ψ，F）上的随

机变量，则有 (H1) $\tau_X^a=2/a\int Xd\mu-\int XdP+(1-2/a)M^aX$；特别地，我们有 $\tau_X=\int Xd\mu-\int XdP$，因此 τ_X 与 MX 的具体取值无关；(H2) $\tau_X=\inf_{b\in R}\int|X-b|\,dP$；(H3) $\tau_{X+Y}\leq\tau_X+\tau_Y$。

证明 （H1）利用注 2 中 τ^a_X 的定义与引理 2，将需要证明的等式变形：

$$\tau^a_X = 2/a\int Xd\mu - \int XdP + M^aX - 2/aM^aX = 2/a\int (X-M^aX)\,d\mu - \int (X-M^aX)\,dP = \int |X-M^aX|\,dP.$$

令 Y：=X−M^aX，我们需要证明：

$$2\int Yd\mu = a\int YdP + \int |Y|\,dP. \tag{1}$$

而（1）的右边等于

$$a\int YdP + \int |Y|\,dP = a\left(\int (Y+|Y|)\,dP\right) = 2a\int Y^{+}\,dP = 2aE(Y^{+}); \tag{2}$$

（1）的左边等于 $2\int Yd\mu = 2\int_{-\infty}^{0}[G_{\mu,Y}(x)-1]\,dx + 2\int_{0}^{+\infty}G_{\mu,Y}(x)\,dx = 2\int_{-\infty}^{0}[\mu(Y>x)-1]\,dx + 2\int_{0}^{+\infty}\mu(Y>x)\,dx = 2\int_{-\infty}^{0}[\gamma(P(Y>x))-1]\,dx + 2\int_{0}^{+\infty}\gamma(P(Y>x))\,dx = 2\int_{-\infty}^{0}[1\wedge a(P(Y>x))-1]\,dx + 2\int_{0}^{+\infty}(1\wedge a(P(Y>x)))\,dx$。由 Y：=X−M^aX 与 M^aX 的定义可知：对任意的 x<0，y>0，我们有 P（Y>x）=P（X−M^aX>x）=P（X>x+M^aX） ≥ P（X>M^aX）； 而 P（X>M^aX）=GP，X（M^aX）=1/a， 所 以 P（Y>x） ≥ 1/a，x<0。 同 理 P（Y>y） ≤ 1/a，y>0。 因 此 $\int_{-\infty}^{0}[1\wedge a(P(Y>x))-1]\,dx = 0$，$\int_{0}^{+\infty}1\wedge a(P(Y>x))\,dx = \int_{0}^{+\infty}a(P(Y>x))\,dx$。从而

$$2\int Yd\mu = 2a\int_{0}^{+\infty}P(Y>x)\,dx \tag{3}$$

又因为

$$E(Y^{+}) = \int_{-\infty}^{0}[P(Y^{+}>x)-1]\,dx + \int_{0}^{+\infty}P(Y^{+}>x)\,dx = \int_{0}^{+\infty}P(Y^{+}>x)\,dx = \int_{0}^{+\infty}P(Y>x)\,dx, \tag{4}$$

结合等式（2）、（3）、（4），等式（1）成立，从而（H1）成立。

注 4 此结果表明，对于一般的 a>1，$\tau^a X$ 与 M^aX 的具体取值有关。当 a=2 时，我们显然有 $\tau X=\int Xd\mu \int XdP$，此时，$\tau X$ 显然与 MX 的具体取值无关。

（H2）由 τX 的定义可知“左边≥右边”。对任意的 b ∈ R，由定理的第（H1）部分及引理 2 可知 $\tau X=\int Xd\mu - \int XdP=\int (X-b)\,d\mu - \int (X-b)\,dP$。所以等价地我们需要证明：对任意的 b ∈ R，

$$\int (X-b)\,d\mu \leqslant \int (X-b)\,dP + \int X-b\,dP \tag{5}$$

记 Y：=X−b，则（5）的右边

$$\int (X-b)\,dP + \int X-b\,dP = \int Y dP + \int Y\,dP = 2\int Y^{+}dP; \qquad (6)$$

另一方面，（5）的左边

$$\int (X-b)\,d\mu = \int Y d\mu = \int_{-\infty}^{0}[G_{\mu,Y}(x)-1]\,dx + \int_{0}^{+\infty} G_{\mu,Y}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0}[\gamma(P(Y>x))-1]\,dx + \int_{0}^{+\infty}\gamma(P(Y>x))\,dx =$$
$$\int_{-\infty}^{0}[1\wedge 2(P(Y>x))-1]\,dx + \int_{0}^{+\infty}(1\wedge 2(P(Y>x)))\,dx \le \int_{0}^{+\infty}(1\wedge 2(P(Y>x)))\,dx \le$$
$$\int_{0}^{+\infty} 2P(Y>x)\,dx \le \int_{0}^{+\infty} 2P(Y^{+}>x)\,dx = 2\int Y^{+}\,dP, \qquad (7)$$

结合（6）、（7），不等式（5）成立。从而（H2）成立。

（H3）对随机变量 X，Y，由 τ_X，τ_Y 的定义可知 $\tau_X = \int X-MX\,dP$，$\tau_Y = \int Y-MY\,dP$。而由定理的第（H2）部分可知 $\tau_{X+Y} \leqslant \int X+Y-(MX+MY)\,dP \leqslant \int X-MX\,dP + \int Y-MY\,dP = \tau_X + \tau_Y$。从而定理证明完毕。

参考文献

[1] Duffie D，Epstein L. Stochastic differential utility [J]. Econometrica，1992，60（2）：353-394.

[2] Peng S. Backward SDE and related g-expectation [C] //In： ElKaroui N，Mazliak L （eds）. Backward Stochastic Differential Equations，Pitman Research Notes Mathematical Series。Essex： Longman，Harlow，1997，364：141-159.

[3] Dieter Denneberg. Non-additive measure and integral [M]。Boston：Dordrecht，Kluwer Academic Publishers，1994.

[4] YanJia-an. A short presentation of choquet in tegral（An adaptation of the book “Non-addative Measure and Integral” byD Denneberg）[M]. Preprint，2004：1-23.

[5] 严士健，王隽骧，刘秀芳. 概率论基础 [M]. 北京：科学出版社，1982.