教育研讨
2025 年 4 月第 7 卷第 4 期

“数学物理方法”可视化素材资源库建设及教学实践

黄海深　吴　波

遵义师范学院物理与电子科学学院，遵义

摘　要 | “数学物理方法”作为物理学专业的必修课程，因其内容抽象、数学推导复杂，在传统教学模式下，学生难以建立清晰的物理图像。针对现有研究中复变函数论探索不足且过度依赖商业软件等问题，本文提出以C++编程为工具，构建覆盖复变函数论、数学物理方程和特殊函数论的可视化素材资源库。通过运用有限差分法、插值算法等方法，并借助免费的Gnuplot生成图像，实现数学工具对物理问题的直观表达。以一维波动方程为例，动态展示波形随时间的演化。教学实践表明，该资源库的使用能够提升学生的理论理解能力与课堂参与度。

关键词 | 波动方程；有限差分法；可视化；数值解

“数学物理方法”是物理学等理工科专业的核心课程，涵盖复变函数论、数学物理方程和特殊函数论三大模块，旨在培养学生运用数学工具解决物理问题的能力[1]。然而，该课程内容抽象、数学推导复杂，学生常因难以建立清晰的物理图像而丧失学习兴趣。例如，复变函数中的解析延拓、留数定理等概念，以及波动方程、热传导方程的求解过程，都需要学生具备比较扎实的高等数学基础[2]。

近年来，国内学者在课程改革中积极探索可视化技术的应用。江萍等人[3]通过三维动态仿真技术展示数学物理问题的物理图像，解决了大学生在课程学习过程中理解困难的问题。田秀云等人[4]指出，可视化和探究式教学是提高教学质量的有效方法。此外，刘彪等人[5]结合Matlab编程实现了不同类型的扩散方程的可视化教学，激发了学生的学习积极性。

然而，现有研究大多依赖商业软件，且部分软件已经对国内高校的使用进行了限制，这在一定程度上限制了可视化资源库的建设。本文采用免费的C++编程工具以及免费的Gnuplot绘图软件，构建包含复变函数论、数学物理方程和特殊函数论的可视化素材资源库，并通过具体案例展示可视化过程。

1　可视化素材资源库建设方法

1.1　教学体系改革

（1）目标定位

以“深化理论理解+培养物理直觉”为核心，通过可视化绘图将抽象的数学工具与物理问题紧密结合。

基金项目：贵州省高等学校教学内容和课程体系改革项目（项目编号：GZJG2023280）；贵州省第二批省级“金课”大学物理实验（项目编号：2024JKHH0226）。
通讯作者：吴波（1979–），男，贵州福泉人，博士，遵义师范学院物理与电子科学学院教授，硕士生导师，研究方向：凝聚态物理。
文章引用：黄海深，吴波．“数学物理方法”可视化素材资源库建设及教学实践［J］．教育研讨，2025，7（4）：488–491.
https://doi.org/10.35534/es.0704094

（2）数值求解及可视化

复变函数论：解析函数的几何表示、留数积分路径可视化、级数的逐渐逼近可视化等。

数学物理方程：波动方程、输运方程、场稳定方程以及特殊函数的数值解动态演化。

（3）评价改革

采用"期末考试+过程考核+应用能力"的多元评价体系，强化过程考核及应用能力。

1.2　资源库开发流程

（1）算法设计：针对不同问题选择可视化方法。

复变函数：复数域插值算法、留数积分路径离散化。

偏微分方程：有限差分法。

（2）代码实现：基于C++编写程序，输出数值数据。

（3）可视化呈现：利用Gnuplot生成图像。

2　教学实践案例：一维波动方程的动态模拟

2.1　理论背景

在忽略重力、空气阻力等外力影响的情况下，由均匀且完全柔软的弦的微小横振动以及均匀弹性杆的微小纵振动可推导出一个相同的方程：

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) \qquad (1)$$

此即一维波动方程。其中，a为常数，对于弦来说，由张力和线密度决定；而对于杆来说，由弹性模量及密度决定。若 $f(x,t)=0$，方程为齐次二阶偏微分方程，其解由初始条件和边界条件共同决定；若 $f(x,t)\neq 0$，方程为非齐次二阶偏微分方程，则其解是自由振动齐次解和受迫振动特解的叠加。

对于齐次方程

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \qquad (2)$$

进行变量代换

$$\xi=x+at \qquad (3)$$

$$\eta=x-at \qquad (4)$$

代入式（2），可得

$$u_{\xi\eta}=0 \qquad (5)$$

其通解为

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at) \qquad (6)$$

右边第一项f_1和第二项f_2为任意函数，分别表示以速度a向左和向右传播的行波。考虑定解条件，

$$u(x,0)=\varphi(x)\quad(-\infty<x<\infty) \qquad (7)$$

$$u_t(x,0)=\psi(x)\quad(-\infty<x<\infty) \qquad (8)$$

可求出特解，即达朗贝尔公式

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi \qquad (9)$$

达朗贝尔公式表明，弦或杆上的任何微小扰动都会以左右行波的形式以速度a传播出去。

若加上边界条件

$$u(0,t)=0 \qquad (10)$$

$$u(L,t)=0 \qquad (11)$$

齐次方程的解为驻波。这里给出的边界条件为齐次的，如果是非齐次的，可通过一定的方法变换为齐次的。

2.2　动态模拟

对于一般情况，泛定方程、边界条件及初始条件都是非齐次的情况下，方程的求解较为困难。这里本研究考虑使用有限差分方法对求解区域进行网格划分，使连续方程离散化，使用C++编写程序，最后使用免费软件Gnuplot输出可视化图像，完成动态模拟。

对于一般问题（设a=1）

$$u_{tt}-u_{xx}=f(x,t)\quad(0<x<1,\ \ 0<t\le 1) \qquad (12)$$

$$u(0,t)=\mu(t)\quad(0\le x\le 1) \qquad (13)$$

$$u(1,t)=\nu(t)\quad(0\le t\le 1) \qquad (14)$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\quad(0\le x\le 1) \qquad (15)$$

$$u_t(x,0)=\psi(x)\quad(0\le x\le 1) \qquad (16)$$

将x方向和t方向分别平分为M和N等份，步长分别为 Δx=1/M 和 Δt=1/N，对于任意一点$u(x,t)$，可表示为 $u(i\Delta x, j\Delta t)$，记为 $u_{(i,j)}$。此时方程（12）–（16）可离散化为以下形式：

$$\frac{u_{(i,j+1)}-2u_{(i,j)}+u_{(i,j-1)}}{(\Delta t)^2}-\frac{u_{(i+1,j)}-2u_{(i,j)}+u_{(i-1,j)}}{(\Delta x)^2}= \qquad (17)$$
$$f(i\Delta x, j\Delta t)\quad(i=0,1,2,\cdots,M;\ j=0,1,2,\cdots,N)$$

$$u_{(0,j)}=\mu(j\Delta t)\quad(j=0,1,2,\cdots,N) \qquad (18)$$

$$u_{(x,j)}=\nu(j\Delta t)\quad(j=0,1,2,\cdots,N) \qquad (19)$$

$$u_{(i,0)}=\varphi(i\Delta x)\quad(i=0,1,2,\cdots,M) \qquad (20)$$

$$\frac{u_{(i,1)}-u_{(i,0)}}{\Delta t}=\psi(i\Delta x)+\frac{1}{2}\Delta t\frac{u_{(i+1,0)}-2u_{(i,0)}+u_{(i-1,0)}}{(\Delta x)^2} \qquad (21)$$
$$(i=0,1,2,\cdots,M)$$

接下来以驻波为例进行可视化：

$$u_{tt}-u_{xx}=0\quad(0<x<\pi,\ \ 0<t\le 1) \qquad (22)$$

$$u(0,t)=0\quad(0\le t\le 1) \qquad (23)$$

$$u(\pi,t)=0\quad(0\le t\le 1) \qquad (24)$$

$$u(x,0)=5\sin 2x\quad(0\le x\le\pi) \qquad (25)$$

$$u_t(x,0)=\sin 6x\quad(0\le x\le\pi) \qquad (26)$$

这个定解问题是可以解出解析解的。其解析解可通过分离变量法和傅里叶级数展开求出。假设解为 $u(x,t)$=$X(x)T(t)$，代入方程后分离得到：

https://doi.org/10.35534/es.0704094

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + \lambda T = 0$$

考虑边界条件式（23）和（24），可得本征函数为 $X_n(x) = \sin(nx)$，其中 $n = 1,2,3,\ldots$。时间部分的解为：

$$T_n(t) = A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt) \tag{27}$$

综合空间部分和时间部分，可得一般解为：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt)\right]\sin(nx) \tag{28}$$

代入初始条件式（25）和（26），可得最终解为

$$u(x,t) = 5\cos(2t)\sin(2x) + \frac{1}{6}\sin(6t)\sin(6x) \tag{29}$$

上述求解过程看似简单，实际中间省略了许多推导步骤。对于学生来说，求解过程较为困难，且学生也难以从繁杂的公式中领悟其中的物理意义。如果采用有限差分方法，按方程（17）–（21）进行离散化，并进行编程求解，可得求解区域内任意一点的位移值。取 M=100、N=5000时，位移如图1所示。图中可以看出，两个端点x=0和x=π，以及中间x=π/2始终为0，而x=π/4和x=3π/4处的振幅最大，波形随时间的演化明显是一种驻波。

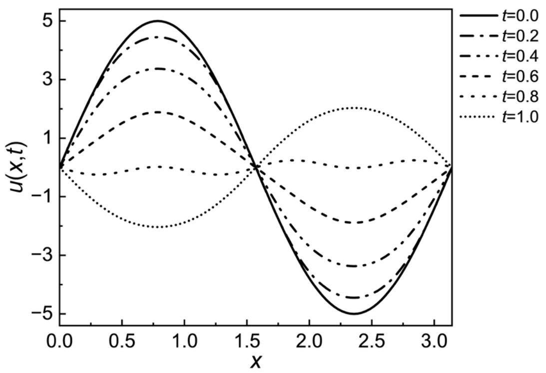

图 1　M=100、N=5000时式（22）–（26）的图像
Figure 1　The graph of Equations (22)-(26) when M = 100 and N = 5000

2.3　教学效果总结

以驻波方程的动态模拟为例，展示了资源库在偏微分方程方面的建设过程和效果。学生可通过调整参数，如初始位移函数、初始速度函数、波速以及空间和时间步长等，来观察波形的变化，从而加强对波动方程物理内涵的理解，提高了学生学习"数学物理方法"课程的兴趣。

3　结论

通过建设"数学物理方法"可视化素材资源库，将数学物理方法的主要内容转化为直观的物理图像，可以有效解决课程"抽象难懂"的痛点。以一维波动方程为例展示了数学物理方程的可视化过程，这些技术的应用不仅可以辅助理论教学，还能激发学生的探索兴趣，为其后续的学习深造或工作实践奠定基础。

参考文献

［1］吴波，周庭艳，黄海深，等．以微课资源库开发为基础的《数学物理方法》翻转课堂教学模式改革及实践［J］．遵义师范学院学报，2019（21）：124–128．
［2］黄海深，万秋红，李平，等．一维输运方程的编程求解及可视化［J］．科学技术创新，2023（23）：88–91．
［3］江萍，杨华军，何文森，等．数学物理方程三维可视化仿真——《数学物理方法》课程实践［J］．教育教学论坛，2013（3）：247–249．
［4］田秀云，谢钦，师文庆，等．数学物理方法课程的教学探究与实践［J］．创新创业理论研究与实践，2023，6（12）：14–17．
［5］刘彪，刘庆源，刘华勇．Matlab在数学物理方程可视化教学中的探析［J］．科技视界，2022（25）：138–140．

Development and Teaching Practice of a Visualization Resource Library for "Methods of Mathematical Physics"

Huang Haishen Wu Bo

College of Physics and Electronic Science, Zunyi Normal University, Zunyi

Abstract: As a compulsory course for physics majors, "Mathematical Physics Methods" poses significant challenges for students in forming clear physical imagery under traditional teaching approaches due to its abstract content and complex mathematical derivations. Addressing the insufficient exploration of complex function theory in existing research and the overreliance on commercial software, this paper proposes constructing a visualization resource library covering complex function theory, mathematical physics equations, and special function theory using C++ programming. By employing methods such as finite difference schemes and interpolation algorithms, coupled with the free software Gnuplot for graphical rendering, we achieve intuitive representations of mathematical tools applied to physical problems. Taking the one-dimensional wave equation as an example, dynamic simulations visually demonstrate waveform evolution over time. Teaching practices demonstrate that this resource library effectively enhances students' theoretical comprehension and classroom engagement.

Key words: Wave equation; Finite difference method; Visualization; Numerical solution

https://doi.org/10.35534/es.0704094