应用数学资讯
2020 年 2 月第 2 卷第 1 期

# The application of convolution distribution to prime claim with multiple independent policies in individual risk model

Wu Qian

Ningbo University of Finance and Economics, Ningbo

**Abstract:** The convolution distribution of discrete random variables and that of continuous random variables are analyzed for the prime claim with multiple independent policies in the individual risk model.

**Key words:** Risk model; Claim settlement; Convolution

Received: 2020-01-23; Accepted: 2020-02-07;Published: 2020-02-09

文章引用：吴倩．卷积分布在个体风险模型中有多个独立保单的总理赔额中的应用［J］．应用数学资讯，2020，2（1）：14–18.
https://doi.org/10.35534/ami.0201003

# 卷积分布在个体风险模型中有多个独立保单的总理赔额中的应用

吴　倩

宁波财经学院，宁波

邮箱：qwuian09@sina.com.cn

**摘　要：**针对个体风险模型中有多个独立保单的总理赔额，举例分析了离散型随机变量的卷积分布和连续型随机变量的卷积分布。

**关键词：**风险模型；理赔；卷积

收稿日期：2020–01–23；录用日期：2020–02–07；发表日期：2020–02–09



在个体风险模型中，感兴趣的是多个保单总理赔额 $S$ 的分布：

$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

其中 $X_i$ 表示保单 $i$ 的理赔额。假定各风险 $X_i$（$i = 1$，…，$n$）是相互独立的。

这里独立随机变量和的分布可通过卷积公式求得。下面考虑两个独立随机变量和的分布问题。

根据全概率公式$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B \mid A_i)$，独立随机变量 $X$，$Y$ 的和 $X+Y$ 的分布函数有：

$$
\begin{aligned}
F_{X+Y}(s) &= p(X+Y \leqslant s) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P(X+Y \leqslant s) \mid X = x)\, dF_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P(Y \leqslant s-x \mid X = x)\, dF_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P(Y \leqslant s-x)\, dF_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(s-x)\, dF_X(x) =: F_X * F_Y(s)
\end{aligned}
$$

其中 $F_X * F_Y(s)$ 是 $F_X(\cdot)$ 和 $F_Y(\cdot)$ 的卷积。

如果 $X$，$Y$ 是离散型的，则有$F_X * F_Y(s) = \sum_x F_Y(s-x) f_X(x)$。

$f_X * f_Y(s) = \sum_x F_Y(s-x) f_X(x)$其中求和是取遍所有使得 $f_x(x) > 0$ 的 $x$。

如果 $X$，$Y$ 是连续型的，则有$F_X * F_Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(s-x) f_X(x)\, dx$。

对积分号下求导得$f_X * f_Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(s-x) f_X(x)\, dx$

# 1　离散分布的卷积

设随机变量 $X_1$，$X_2$，$X_3$ 的概率分布律分别为

$$
f_1(x) = \begin{cases} 1/4, x = 0 \\ 1/2, x = 1 \\ 1/4, x = 2 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1/2, x = 0 \\ 1/2, x = 2 \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} 1/4, x = 0 \\ 1/2, x = 2 \\ 1/4, x = 4 \end{cases}
$$

用 $f_{1+2}$ 表示 $f_1$ 和 $f_2$ 的卷积，$f_{1+2+3}$ 表示 $f_1$，$f_2$ 和 $f_3$ 的卷积，$f_{1+2+3}$ 表示 $X_1 + X_2 + X_3$ 的分布函数，则利用卷积公式有如表 1 。比如表 1 中：

$$
f_{1+2}(1) = f_1(0) \cdot f_2(1) + f_1(1) \cdot f_2(0) = 1/4 \times 0 + 1/2 \times 1/2 = 2/8
$$

$$
\begin{aligned}
f_{1+2+3}(2) &= f_{1+2}(0) \cdot f_3(2) + f_{1+2}(2) \cdot f_3(0) + f_{1+2}(1) \cdot f_3(1) \\
&= 1/8 \times 1/2 + 2/8 \times 1/4 + 2/8 \times 0 = 4/32
\end{aligned}
$$

$$
F_{1+2+3}(3) = f_{1+2+3}(0) + f_{1+2+3}(1) + f_{1+2+3}(2) + f_{1+2+3}(3) = 13/32
$$

表 1　离散分布的卷积计算表

| x | $f_1(x)$ | * | $f_2(x)$ | = | $f_{1+2}(x)$ | * | $f_3(x)$ | = | $f_{1+2+3}(x)$ | ⇒ | $F_{1+2+3}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1/4 | | 1/2 | | 1/8 | | 1/4 | | 1/32 | | 1/32 |
| 1 | 1/2 | | 0 | | 2/8 | | 0 | | 2/32 | | 3/32 |
| 2 | 1/4 | | 1/2 | | 2/8 | | 1/2 | | 4/32 | | 7/32 |
| 3 | 0 | | 0 | | 2/8 | | 0 | | 6/32 | | 13/32 |
| 4 | 0 | | 0 | | 1/8 | | 1/4 | | 6/32 | | 19/32 |
| 5 | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 6/32 | | 25/32 |
| 6 | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 4/32 | | 29/32 |
| 7 | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 2/32 | | 31/32 |
| 8 | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 1/32 | | 32/32 |

## 2　连续分布的卷积

设 $X \sim U(0,1)$ 和 $Y \sim U(0,1)$ 相互独立，如何求 $X+Y$ 的分布函数？

示性函数$I_A(x)=\begin{cases}1, x \in A\\ 0, x \notin A\end{cases}$可以表达定义在不同区间上有不同取值的函数。

对任意的 $x$，$X$ 的分布函数为：$F_X(x)=0 \cdot I_{(-\infty,0)}(x)+x \cdot I_{[0,1)}(X)+1 \cdot I_{[1,\infty)}(x)$ $F'_X(x)=1 \cdot I_{[0,1)}(x)$，有$\mathrm{d}F_X(x)=I_{[0,1)}(x)\,\mathrm{d}x$

而$F_Y(s-x)=\begin{cases}0, s-x<0\\ s-x, 0 \leqslant s-x<1\\ 1, s-x \geqslant 1\end{cases}$

由卷积公式

$$
\begin{aligned}
F_{X+Y}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(s-x)\,dF_X(x) = \int_0^1 F_Y(s-x)\,\mathrm{d}x \\
&= 0 \cdot I_{(-\infty,0)}(s) + \left[\int_0^s (s-x)\,dx\right] \cdot I_{[0,1)}(s) \\
&\quad + \left[\int_0^{s-1} 1\,\mathrm{d}x + \int_{s-1}^1 (s-x)\,\mathrm{d}x\right] \cdot I_{[1,2)}(s) + \left[\int_0^1 1\,\mathrm{d}x\right] \cdot I_{[2,\infty)}(s) \\
&= 0 \cdot I_{(-\infty,0)}(s) + \frac{s^2}{2} \cdot I_{[0,1)}(s) + \left(2s - \frac{s^2}{2} - 1\right) \cdot I_{[1,2)}(s) + 1 \cdot I_{[2,\infty)}(s)
\end{aligned}
$$

故$f_{(X+Y)}(s)=F'_{X+Y}(s)=0 \cdot I_{(-\infty,0)}(s)+s \cdot I_{[0,1)}(s)+(2-s) \cdot I_{[1,2)}(s)+0 \cdot I_{[2,\infty)}(s)$

对于多个独立随机变量和的卷积运算类似，作卷积运算时所用的卷积次序不改变结果。

由归纳法可以证明，一般的，若 $X_i(i=1,\cdots,n)$相互独立同分布于 $U(0,1)$，


https://doi.org/10.35534/ami.0201003

则 $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 的概率密度为 $f_S(s) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{h=0}^{[s]} C_n^h(-1)^h(s-h)^{n-1}$ 其中 $[s]$ 表示 $s$ 的整数部分。卷积运算可以计算多个独立随机变量和的分布，将其用于个体风险模型中总理赔额的分布比较简便。当然利用分布函数的变换有时也可以较容易的确定独立随机变量和的分布，比如矩母函数和特征函数均可确定。

## 参考文献


[1] 盛骤，谢式千，潘承毅．概率论与数理统计 [M]．北京：高等教育出版社，2000.

[2] 卡尔斯，胡法兹，达呐，等．现代精算风险理论 [M] 北京：科学出版社，2000.