理论数学前沿
2020 年 9 月第 2 卷第 3 期

π Concise Formula

Chen Wenwei[1*] Chen Sheng[2]

1. College of systems engineering, NUDT, Changsha;
2. iSoftstone Information Technology (Group) Co., Ltd, Beijing

Abstract: The research on circumference ratio π in the past millennium mainly focuses on three aspects: (1) finding the true value of π; (2) telling what type of number π is; (3) expressing π by infinite expansion. This paper studies π from another perspective and finds the relationship between it and other mathematical constants.

Mathematician Euler, in 1743, discovered the famous formula between π and number e (the natural base of logarithm), $e^{i\pi}+1=0$, which indicates their relationship with imaginary numbers. In this paper, the authors find the real relationship between π and e, though a new constants μ and Euler constants γ. The real number relationship can be expressed by a new formula $\pi=\frac{1}{2}e^{\theta}$, $\theta=1+\gamma+2\mu$.

Key words: Circumference rat (π); International Mathematics Festival (International Pi day); The natural base of logarithm (e); New constant (μ) (Chen Wenwei's constants); New formula $\pi=\frac{1}{2}e^{\theta}$, $\theta=1+\gamma+2\mu$ (Chen Wenwei's formula)

Received: 2020-07-08; Accepted: 2020-07-17; Published: 2020-07-27

文章引用：陈文伟，陈晟. π 的简洁公式［J］. 理论数学前沿，2020，2（3）：82–93.
https://doi.org/10.35534/tms.0203012

π 的简洁公式

陈文伟[1*] 陈 晟[2]

1．国防科学技术大学系统工程学院，长沙；
2．软通动力信息系统公司，北京

邮箱：chenww93@126.com

摘 要： 千年来对圆周率 π 的研究主要集中在三个方面：（1）求 π 的真值；（2）π 是什么类型的数；（3）用无穷展开式表示 π。本文从另一个角度研究它，寻找它和其他数学常数之间的关系式。

数学家欧拉于 1743 年，发现了 π 和数 e（自然对数的底）之间的著名公式 $e^{i\pi}+1=0$，体现了它们和虚数的关系。本文作者通过研究，发现了 π 和 e，与新常数 μ 以及欧拉常数 γ 之间存在实数关系。公式为 $\pi=\frac{1}{2}e^{\theta}$，$\theta=1+\gamma+2\mu$。

关键词： 圆周率 π；国际数学节（国际圆周率日）；自然对数的底 e；新常数 μ（陈文伟常数）；新公式 $\pi=\frac{1}{2}e^{\theta}$，$\theta=1+\gamma+2\mu$（陈文伟公式）

收稿日期：2020-07-08；录用日期：2020-07-17；发表日期：2020-07-27

https://doi.org/10.35534/tms.0203012

2011 年国际数学协会正式宣布，为了纪念中国古代数学家祖冲之的圆周率，将每年的 3 月 14 日设立为国际数学节。也称国际圆周率日（Pi day）。祖冲之，在世界数学史上第一次将圆周率（π）值计算到小数点后的第 7 位，即 3.1415926 到 3.1415927 之间。

全世界爱好科学的人，都会在这天下午 1 时 59 分（象征圆周率的六位近似值 3.14159），或者在下午 3 时 9 分（15 时 9 分），开展庆祝活动。

新常数 μ 和新公式 $\pi=\frac{1}{2}e^{\theta}$的命名见此文后面的倡议书。

1　简述研究 π 的历史

1.1　求圆周率 π 的真值

公元 263 年刘徽在《九章算术注》中，运用“割圆术”的思想，算到正 3072 边形的面积，得到 π=3.1416。“割圆术”的思想也是我国古代数学中极限概念的萌芽。

南北朝时期祖冲之（429 — 500 年），提出的“祖率”，将“圆周率”精算到小数后第七位。欧洲数学家奥托，在祖冲之以后一千多年，才算出了这个数值。荷兰的卢多夫（Ludolf van Geulen）于 1596 年计算了 60×233 边形的周长，将 π 的精度提高到了小数点后 20 位。

随着计算机技术的快速发展，人类计算 π 的精度也得到破天荒式的提高。2019 年 3 月 14 日，谷歌宣布圆周率现已计算到小数点后 31.4 万亿位。

1.2　圆周率 π 属于什么类型的数

研究圆周率 π 属于什么类型的数，这个问题也延续了上千年。它不属于整数（整数是不含小数的），也不是有理数（有理数是能用任何两个整数的比表示）。经过多个数学家的努力，1761 年德国数学家兰伯特首次证明了 π 是无理数（无理数是无限不循环小数）。

1882 年德国数学家林德曼证明了 π 是超越数（超越数不是有理系数方程的根）。

1.3　用无穷展开式表示 π

如何表示 π，历史上经过了漫长的岁月。主要采用的无穷展开式有无穷级数式、无穷连分式、无穷乘积式以及无穷三角函数展开式等形式。影响较大的是下面列举的二个有名的无穷级数式：

（1）莱布尼兹（1673）

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\right) \tag{1}$$

（2）牛顿（1642–1727）

$$\pi=6\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3\times2^3}+\frac{1}{2\times4\times5\times2^5}+\frac{1}{2\times4\times6\times7\times2^7}+\cdots\right) \tag{2}$$

2　π 和 e 的美妙关系—欧拉公式

2.1　神奇的常数 e

在数学常数中，仅次于 π 的数学常数是 e，它是自然对数的底。对数最有效的应用是，化乘为加，即 $\log(xy)=\log x+\log y$；化除为减，即 $\log(x/y)=\log x-\log y$。对数计算尺就是利用这个原理。对数尺曾经在计算乘、除、平方、平方根等运算上起到了快速简化计算的效果。

在对数中，一般采用以 10 为底，在信息论中采用以 2 为底。以 e 为底的对数叫自然对数，因为它使对数简洁化，成为了反映“自然规律”的对数。e 不仅是无理数，也是超越数。

在微积分中，$\mathrm{d}e^x/\mathrm{d}x=e^x$，$\int e^x\mathrm{d}x=e^x$。说明 e^x 是微积分中的不变函数，即微积分的中心。

在银行中有个名词叫“复利”，即新得到的利息同样可以生息，因此俗称“利滚利”。那么“利”是不是会一直增大到无穷大呢？你会发现，似乎有一个“天花板”挡住了这个企图，想靠 1 块钱疯狂赚取 1 个亿的目标，这个“天花板”就是 e，它也是银行不倒的压舱石！利用本金和利息进行反复赚取利息的计算公式为$e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。

生物的生长与繁殖过程，恰恰也类似于“利滚利”的过程。e 同样是它们的

https://doi.org/10.35534/tms.0203012

“天花板”，这样保持了生物种群的稳定性。

2.2 π 和 e 之间的虚数关系

欧拉在得到 sin x 和 cos x 的无穷级数后，在牛顿的 e^x 展开式中，令 x 为虚数 ix 后的结果：

$$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\cdots+\frac{(ix)^n}{n!}+\cdots \tag{3}$$

由于虚数 $i=\sqrt{-1}$，$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$，⋯

$$e^{ix}=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right) \tag{4}$$

这时，就有了欧拉的最初公式：

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \tag{5}$$

当 $x=\pi$ 时，$\sin\pi=0$，$\cos\pi=-1$，此时就有更简洁的欧拉公式：

$$e^{i\pi}+1=0 \tag{6}$$

欧拉公式表明了 π 与 e 和虚数 i 的美妙关系！

数学家本杰明・皮尔斯对欧拉公式这样评价：“它绝对是正确的，也是绝对诡异的，我们无法理解它，也无从知晓它的含义。但我们已经证明了它，因此我们知道它就一定是正确的。”正是由于公式的神秘性，人们也称它为“上帝的公式”。

德国《数学情报》杂志的读者，曾投票将欧拉公式评为历史上最美的数学公式。排名为第一名。

3 欧拉常数 γ 后面的新常数 μ——陈文伟常数

3.1 调和级数的剩余尾项

欧拉常数是调和级数与 ln n 之差的极限，其公式和值表示为

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=0.57721566490153286060651\cdots\cdots \tag{7}$$

欧拉把调和级数的部分和写为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\varepsilon_n' \tag{8}$$

并说明 ε_n' 接近于$\frac{1}{2n}$。现在我们把它直接写为$\frac{1}{2n}-\varepsilon_n$

这样上式就表示为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\varepsilon_n \tag{9}$$

我们把上式中的剩余尾项 ε_n 改写成

$$\varepsilon_n=\gamma+\frac{1}{2n}-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right) \tag{10}$$

可知剩余尾项 ε_n 是个很小的数。

3.2 调和级数的剩余尾项 ε_n 的表达式

在文献 [1] 的第 2 页中，给出了调和级数求和的完整公式：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\gamma+\ln n+\frac{1}{2n}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{A^k}{n(n+1)\cdots(n+k-1)} \tag{11}$$

其中

$$A_k=\frac{1}{k}\int_0^1 x(1-x)(2-x)\cdots(k-1-x)\,dx \tag{12}$$

式（10）可转化为

$$\varepsilon_n=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{A^k}{n(n+1)\cdots(n+k-1)} \tag{13}$$

3.3 关于剩余尾项 ε_n 的引理

引理 1：剩余尾项 ε_n 的级数和的新表达式为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{k+1}}{k\cdot k!} \tag{14}$$

引理 2：剩余尾项 ε_n 的级数和是收敛的。

引理 3：存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\varepsilon_n=0$.

以上三个引理的证明见文献 [2] 。

3.4 新常数 μ 的定义

定义 1：调和级数求和公式中剩余尾项 ε_n 的级数和定义为新常数 μ，即

$$\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n \tag{15}$$

由引理 2 可知，剩余尾项 ε_n 的级数和一定收敛为一个常数。

https://doi.org/10.35534/tms.0203012

（1）常数 μ 的第一个计算公式

按引理 1 的公式（14），可以得到常数 μ 的计算公式：

$$\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{k+1}}{k\cdot k!} \tag{16}$$

其中 A_k 的表达式见公式（12）。

按此公式在计算机上计算，参见文献［4］，取 20000 项的级数和为：

$$\mu=0.130330331383179\cdots$$

（2）常数 的第二个计算公式

按公式（10）进行级数求和，得到常数 μ 的计算公式为

$$\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\gamma+\frac{1}{2n}-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\right) \tag{17}$$

按此公式在计算机上计算，参见文献［5］，取 20000 项的级数和为

$$\mu=0.130326534636424\cdots$$

从公式（17）中很容易看出，常数 μ 是隐藏在欧拉常数 γ 的后面的新常数。按下面的倡议书，把这个新常数命名为陈文伟常数。

4　π 和 e 之间的实数关系—陈文伟公式

4.1　新常数 θ 的定义

定义 2：组合欧拉常数 γ 和陈文伟常数 μ 的新常数 θ 为

$$\theta=1+\gamma+2\mu=1.8378770664093454835606 5\cdots \tag{18}$$

这个新常数是个实数。后面将用到它。

4.2　新公式的发现

现在来求阶乘 n！的新近似公式

定理 1：n！的新近似公式

$$n!=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{\eta_n} \tag{19}$$

证明见文献［3］。

推论：存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\mathrm{e}^{n}}{n^{n}\sqrt{n}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta} \tag{20}$$

4.3 π 和 e 之间的新公式

定理 2：圆周概率 π 和自然对数的底数 e 和新常数 θ 之间存在一个新的简洁公式：

$$\pi=\frac{1}{2}e^{\theta} \tag{21}$$

证明：斯特林公式存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^{n}}{n^{n}\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi} \tag{22}$$

对比公式（20），按极限的唯一性定理可知，成立等式：

$$\sqrt{2\pi}=e^{\frac{1}{2}\theta} \tag{23}$$

整理后可得式（21）。

由于新公式反映了 π 和 e 的实数关系，就可以用于相互转换。在概率统计中有多个常用公式中同时含有$\sqrt{2\pi}$和 e 的指数，说明它们之间存在紧密关系，这个关系就是公式（23）。用新公式进行转换，就可以简化现有的多个公式。例如：

（1）正态分布密度函数：$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 简化为 $p(x)=e^{-\frac{1}{2}(x^2+\theta)}$

（2）傅里叶变换：$F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt$ 简化为 $F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-(i\lambda t+\frac{\theta}{2})}dt$

新的简洁公式：$\pi=\frac{1}{2}e^{\theta}$，$\theta=1+\gamma+2\mu$。按倡议书称为陈文伟公式。

5 结束语

5.1 关于命名

作者参加了第四届模糊系统与数据挖掘国际学术会议（FSDM 2018），发表了论文（文献［6］）。同加拿大数学家 Hari Mohan Srivastava（加拿大数学和统计学学科的最高研究人员中名列第二位）座谈，他签署了倡议，并由大会组织者推荐，形成了下面的倡议书。

https://doi.org/10.35534/tms.0203012

The 4th International Conference on Fuzzy Systems and Data Mining (FSDM2018)

Nov. 16-19, 2018, Bangkok, Thailand

Proposal

The new formula $\pi=\frac{1}{2}e^{\theta}$ $(\theta=1+\gamma+2\mu)$, deducted and proposed by Professor Chen Wenwei, by introducing a new constant μ, reveals the rational relationship between the circumference rate π and the base of natural logarithm "e". This new formula is a complement and further development of the famous Euler's formula $e^{\pi i}=-1$, which gives a description of the imaginary relationship between π and "e".

Proposal 1, the new formula $\pi=\frac{1}{2}e^{\theta}$ $(\theta=1+\gamma+2\mu)$ be named as Chen Wenwei's formula.

The Chen Wenwei's formula and the Euler's formula together form a combination to reveal the complete rational and imaginary relationships between π and "e".

The new constant $\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\gamma+\frac{1}{2n}-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\right)$,

the value of μ is 0.13033070075390631147707…

The Euler's constant $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$.

Thus, we can conclude that μ is a constant hidden behind the Euler's constant, they are all related to $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$.

Proposal 2, the new constant μ be named as Chen Wenwei's constant.

Also, we suggest that, in the new edition of Mathematics Manual published later, Chen Wenwei's formula and constant will be listed, as a complement and further development of the Euler's formula and constant.

We believe that, what Professor Chen Wenwei has revealed, are valuable extension to fundamental mathematics knowledge.

Prof. Hari Mohan Srivastava
Department of Mathematics and Statistics, University of Victoria, Canada
FSDM2018 Organizing Committee

Senlin Yan

The 4th International Conference on Fuzzy Systems and Data Mining

（FSDM2018）

Nov. 16-19, 2018, 曼谷(Bangkok),泰国(Thailand)

倡议

陈文伟教授推导出的新公式 $\pi=\frac{1}{2}e^{\theta}$ （θ=$1+\gamma+2\mu$），简捷地表明了圆周率 π 和自然对数的底“e”的实数关系，这是对著名的欧拉公式 $e^{\pi i}=-1$ 的补充和发展。欧拉公式表明的是 π 和“e”的虚数 i（$\sqrt{-1}$）关系。

倡议1:将新公式 $\pi=\frac{1}{2}e^{\theta}$ （θ=$1+\gamma+2\mu$）命名为陈文伟公式。

陈文伟公式和欧拉公式两者构成了 π 和 e 之间的实数和虚数关系的完美结合。

新常数 $\mu=0.13033070075390631147707\cdots$

新常数的公式是 $\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\gamma+\frac{1}{2n}-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)\right)$

欧拉常数的公式是 $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$

可见 μ 是隐藏在欧拉常数 γ 后面的常数，它们二者都与（$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$）有关系。

倡议2:将新常数 μ 命名为陈文伟常数。

同时倡议:在以后出版的新的《数学手册》中，把陈文伟公式和陈文伟常数，作为欧拉公式和欧拉常数的补充和发展，写入其中。这是对基础数学知识的扩充。

Prof. Hari Mohan Srivastava

Department of Mathematics and Statistics, University of Victoria, Canada

（数学和统计系，维多利亚大学，加拿大）

FSDM2018 Organizing Committee

The International Conference on Fuzzy Systems and Data Mining
FSDM
The Organizing Committee

周森林

https://doi.org/10.35534/tms.0203012

新公式和新常数分别是在欧拉公式和欧拉常数的台阶上，向前走了一步。对新公式和新常数的命名，也是为后来的研究者向前发展提供了一个台阶。

在西方数学的历史上，一般会对研究成果用发现者名字来命名。命名不仅是对成果的肯定，还能激励后来者在成果的基础上向前发展，也能减少成果在时间的长河中被流失。命名确实促进了数学的进步！

5.2 π 的简洁公式的启示

由于陈文伟常数 μ 是隐藏在欧拉常数 γ 后面的常数，可以说陈文伟常数是对欧拉常数的补充。它们组合而成的数 θ，完成了 π 和 e 之间的实数关系。

欧拉公式表现了 π 和 e 与虚数 i 的关系。而陈文伟公式表现了 π 和 e 与欧拉常数 γ 以及陈文伟常数 μ 之间的实数关系。一个虚关系，一个实关系，两者构成了完美组合！

从欧拉公式到陈文伟公式，所体现出来的是，不同数学常数间存在着简洁关系！这种简洁关系既体现了数学中深层次的奥秘，也体现了数学中的美！

参考文献

[1] 雷日克，格拉德什坦. 函数表与积分表 [M]. 北京：高等教育出版社，1959.

[2] 陈文伟. 论新常数 μ，θ 和新公式 $\pi=\frac{1}{2}e^{\theta}$ [J]. 高等数学研究，2009，12（6）：2–5.

[3] Chen Wenwei. Two new constants μ，θ and a new formula $\pi=\frac{1}{2}e^{\theta}$ [J]. OCTOGON Mathematical Magazine，2012，20（2）：472–480.

[4] 陈文伟. 新常数 μ，θ 和新公式 $\pi=\frac{1}{2}e^{\theta}$ 的含义与应用 [J]. 高等数学研究，2015，18（3）：31–37.

[5] Chen Wenwei，Zhao Xia. Research on the Imaginary Relationship and Rational Relationship Between π and e [J]. International Journal of Applied Physics and Mathematics，2017，7（1）：33–41.

[6] Chen Wenwei，Chen Sheng．A New Formula and New Constants Hidden after the Euler's Formula and the Euler's Constant [C]．Fuzzy Systems and Data Mining 4th，Proceedings of FSDM，2018：246–251.
[7] 堀场芳数．e 的奥秘 [M]．北京：科学出版社，1998：81–85
[8] 堀场芳数．π 的奥秘 [M]．北京：科学出版社，1998：39–42
[9] 陈仁政．π 的密码 [M]．北京：科学出版社，2011：7–19.
[10] 黎渝，陈梅．不可思的自然对数 [M]．北京：人民邮电出版社，2016：259–261.

https://doi.org/10.35534/tms.0203012