

演化博弈视角下企业低碳专利技术购买策略研究

徐浩

西南石油大学经济管理学院，成都

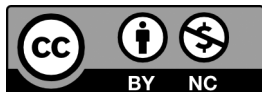
摘要 | 新常态经济发展阶段对我国低碳转型提出了新的挑战，客观上要求企业必须进行减排行为创新，由此催生了低碳专利技术的第三方授权模式。技术授权能够有效实现低碳减排技术从第三方快速流向行业内企业，降低企业的减排成本并促进技术进步。本文运用演化博弈理论，讨论了寡头企业是否购买低碳专利技术来降低生成成本从而提高企业竞争力的问题，研究发现当第三方机构低碳技术转让费较高时，不存在演化稳定点；当低碳技术转让费适中时，存在三个演化稳定点 $(1, 0)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(1, 1)$ ；当专利转让费较低时，存在两个演化稳定点 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$ ，此外，考虑存在一个强势企业，研究第三方机构的低碳技术授权费用对两家企业购买决策的影响。最后，根据均衡结果的演化趋势，给出相关管理启示。

关键词 | 企业竞争；低碳技术专利；演化博弈；购买策略

Copyright © 2025 by author (s) and SciScan Publishing Limited

This article is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>



1 引言

节能减排和低碳经济已成为《京都议定书》和《巴黎协定》缔约国家的共识，我国作为世界最大的发展中国家，已提前3年落实《巴黎协定》的部分承诺，并且将在2020年百分之百兑现承诺。2018年的《中国应对气候变化的政策与行动2018年度报告》指出，我国已基本完成2020年碳强度下降目标，并将着眼于落实2030年左右碳排放达峰的目标。从长远来看，解决环境污染和气候变化问题不能仅靠行政命令与相互补偿，同时也依赖于技术进步，特别是低碳专利技术在不同地区和企业之间的广泛运用。而技术授权可以有效实现减排技术从第三方企业推广到众多企业，提升整个行业的减排效率，实

现区域可持续发展。根据生态环境部的研究报告，我国电力、煤气、石油加工、金属冶炼等几个主要第二产业的碳排放量占全国总碳排放量的70%以上，而上述行业主要是国有垄断大型企业。为此，如何针对寡头垄断企业实施正确的环境政策以减少碳排放量，是我国在绿色发展理念下亟待解决的问题。

随着知识产权与经济社会发展的关系日益密切，作为知识产权运用的重要表现形式，专利交易日益受到社会关注。据统计，2019年度中国专利交易总量为159,640件，与2018年相比增长21.9%，专利权质押超过专利实施许可，同比增长55.6%。从专利交易的情况来看，专利交易活跃度逐渐升温。专利交易量的持续增长有赖于政策的支持和全社会对于知识产权认知的提高。企业作为

基金项目：四川省自然科学基金青年项目（2023NSFSC1055）；西南石油大学人文社科一般基金培育项目（2022-2023RW020）。

作者简介：徐浩，西南石油大学经济管理学院讲师，博士，研究方向：环境政策与管理、决策科学。

文章引用：徐浩. 演化博弈视角下企业低碳专利技术购买策略研究[J]. 社会科学进展, 2025, 7(2): 133-143.

<https://doi.org/10.35534/pss.0702024>

创新的主体，特别在我国“双碳”目标的背景下，是否能够利用低碳技术专利交易有针对性地提高能力、补齐短板，快速提高企业核心竞争力，是企业发展中面临的重要问题，同时从全局均衡来看，有利于提高行业的减排能力，促进低碳减排技术的推广，更好地服务于我国“碳达峰”与“碳中和”战略任务的完成。

供应链上下游企业往往同时存在竞争与合作的双重关系，这种复杂关系导致企业时常企图寻找不劳而获的便利（搭便车）。不同于行为经济学中假定博弈方短视且有限理性，本文假定博弈方虽然不能完全理性地一次性做出最优决策，但可以通过渐进动态学习调整的过程来对之前做出的决策进行调整。本文运用演化博弈对企业专利技术购买决策进行探讨。演化博弈的应用非常广泛，伯拉里（Barari）等^[1]运用演化博弈分析了绿色供应链中企业契约问题的动态演化过程，研究发现企业的经营环境和与经营的动机均非常重要。阿劳霍阿（Araujoa）等^[2]分析了评估征税程度对员工和企业在不同经济条件下（正式及非正式）选择进出的系统演化过程。Xiao等^[3]用演化博弈分析了存在单一供应商情形下多个零售商的动态博弈过程，Yu等^[4]运用演化博弈理论分析了供应商库存管理问题。易余胤等^[5]运用演化博弈研究了两企业合作研发过程中的机会主义，发现若两企业之间不能互相识别，市场中将广泛存在机会主义。郑君君等^[6]研究了信息不对称的IPO市场中不同类型投资者之间的演化博弈过程，探讨了投资市场中的逆向选择问题。刘旭旺和汪定伟^[7]用演化博弈研究了评标过程中不同专家之间的对抗与不合作情形，探讨了个体决策对群体行为的影响。盛光华和张志远^[8]运用演化博弈分析了政府补贴方式对创新成本敏感程度不同的企业的影响。查特吉（Chatterjee）等^[9]结合计算理论，运用演化博弈理论探讨了个体学习能力的问题。

此外，演化博弈在低碳减排中的应用引起了较多关注。王芹鹏等^[10]运用演化博弈研究了存在低碳偏好消费者的情形下，供应链上下游企业关于低碳减排投资行为的稳定策略。奈尼（Naini）等^[11]结合绩效评价方法中的平衡计分卡，运用演化博弈分析了环保供应链管理中的综合表现测量体系，徐建中和吕希琛^[12]分析了低碳经济背景下政府、企业以及消费者三方参与的演化博弈过程，发现低碳经济下不存在政府放任制造企业生产和消费者一味青睐制造企业高碳产品的博弈均衡，Zhu等^[13]研究了政府在绿色供应链中与制造企业的动态演化博弈过程，李友东等^[14]指出政府与核心企业的演化博弈系统存在“路径依赖”的特征，徐建中和徐莹莹^[15]构建了企业低碳技术采纳决策模型，并分析了策略选择的稳定性，发现当且仅当采纳低碳技术可获得额外净收益时，企业才会采用低碳策略。

然而，以往运用演化博弈理论的研究多集中于企业契约、行为决策、绿色供应链等领域，尚未有演化博弈

在低碳技术专利交易市场中的应用。本文在演化博弈理论的视角下研究专利交易市场中，低碳专利技术授权费用对企业购买决策的影响。此外，专利产品在企业实际应用过程中的作用是不确定的，低碳专利产品的不确定性特征是本文研究与以往研究的差别所在。本文对专利产业化的参数设定更加符合现实中专利产品产业化的实际情况，可以为企业购买专利的决策提供借鉴与启示。

2 问题描述

考虑拥有一项低碳技术的第三方机构，向两家企业授权低碳技术。首先第三方机构宣布减排技术成果，并给出售价，之后两家企业根据机构的售价决定是否购买相关减排技术。两家企业在消费者市场上进行古诺博弈（如图1所示），逆需求函数为： $p = a - b(q_1 + q_2)$ ，其中 a 表示潜在市场需求， q_i 表示企业 $i(i=1, 2)$ 的产量。企业若使用现有减排技术会面临排污收费以及环境监管，假设第三方机构所出售的低碳专利技术有利于企业减少排放从而降低生产成本，在没有使用低碳技术之前两家企业单位产品的生产成本都为 c ，若使用之后则可以使成本降为 θc ， θ 为 $(0, 1)$ 区间内的随机变量，表示低碳技术对生产成本的降低程度。在低碳技术降低生产成本程度未知的情况下，企业1和企业2考虑是否从第三方机构购买该专利技术。

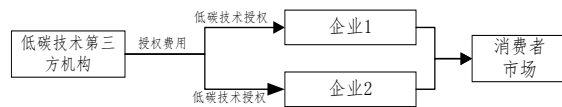


图1 低碳技术交易示意图

Figure 1 Schematic diagram of low-carbon technology trading

记符号 $E(\pi_i^j)$ 与 $E(q_i^j)$ 表示企业 i 在第 j 种策略组合下的期望利润与期望产量，其中 $i=1, 2; j=NN, YN, NY, YY$ 。为了更好地对模型进行解释，本文作如下相应假设：（1）在低碳技术未应用于实际生产之前，企业无法度量此技术对生产成本的降低程度；（2）两企业均为风险中性，博弈过程为完全信息；（3）第三方机构以收取授权费用为唯一目的，不考虑技术授权过程中的法律问题。

3 模型与计算

（1）两家企业都不购买低碳技术

当两家企业都不购买低碳技术时，企业利润函数可表示为：

$$\pi_i^{NN} = [a - b(q_1^{NN} + q_2^{NN}) - c]q_i^{NN}$$

此时生产过程不存在不确定因素，所以期望值等于实际值，通过纳什博弈方法求得两企业均衡产量为：

$$E(q_i^{NN}) = \frac{a-c}{3b}, \text{ 利润为: } E(\pi_i^{NN}) = \frac{(a-c)^2}{9b}.$$

(2) 企业1购买低碳技术

当企业1购买并使用低碳专利技术时，两企业的利润函数为：

$$\pi_1^{YN} = [a - b(q_1^{YN} + q_2^{YN}) - \theta c] q_1^{YN} - F$$

$$\pi_2^{YN} = [a - b(q_1^{YN} + q_2^{YN}) - c] q_2^{YN}$$

其中， F 表示企业1向第三方机构支付的技术使用费，通过纳什博弈方法求得均衡产量和利润如表1所示。

表 1 企业1使用低碳技术情况下均衡产量、利润

Table 1 Balancing production and profit under the use of low-carbon technology in enterprise 1

| 成本降低程度 θ | 均衡产量 | 均衡利润 |
|-----------------------------------|--|--|
| $0 < \theta < 2 - \frac{a}{c}$ | $q_1^{YN} = \frac{a - \theta c}{2b}$ | $\pi_1^{YN} = \frac{(a - \theta c)^2}{4b} - F$ |
| | $q_2^{YN} = 0$ | $\pi_2^{YN} = 0$ |
| $2 - \frac{a}{c} \leq \theta < 1$ | $q_1^{YN} = \frac{a + c(1 - 2\theta)}{3b}$ | $\pi_1^{YN} = \frac{(a + c(1 - 2\theta))^2}{9b} - F$ |
| | $q_2^{YN} = \frac{a + c(\theta - 2)}{3b}$ | $\pi_2^{YN} = \frac{(a + c(\theta - 2))^2}{9b}$ |

表1中假定 $0 < 2 - a/c < 1$ ，可以有效地体现两企业之间的竞争关系，有助于表达企业进入或退出市场的动态关系， $2 - a/c < 0$ 或 $2 - a/c > 1$ 的情况不作为本文研究重点。在企业1购买并使用低碳技术的情况下，两企业的期望产量为：

$$E(q_1^{YN}) = \int_0^{2-\frac{a}{c}} \frac{a - \theta c}{2b} d\theta + \int_{2-\frac{a}{c}}^1 \frac{a + c(1 - 2\theta)}{3b} d\theta = \frac{a^2 - 8ac + 4c^2}{12bc}$$

$$E(q_2^{YN}) = \int_0^{2-\frac{a}{c}} 0 d\theta + \int_{2-\frac{a}{c}}^1 \frac{a + c(\theta - 2)}{3b} d\theta = \frac{(a - c)^2}{6bc}$$

期望利润为：

$$E(\pi_1^{YN}) = \int_0^{2-\frac{a}{c}} \left[\frac{(a - \theta c)^2}{4b} - F \right] d\theta + \int_{2-\frac{a}{c}}^1 \left[\frac{(a + c(1 - 2\theta))^2}{9b} - F \right] d\theta$$

$$= \frac{60a^2c - 11a^3 + 20\psi}{108bc} - F$$

$$E(\pi_2^{YN}) = \int_0^{2-\frac{a}{c}} 0 d\theta + \int_{2-\frac{a}{c}}^1 \frac{(a + c(\theta - 2))^2}{9b} d\theta = \frac{3a^2c - a^3 + 20\psi}{27bc}$$

其中， $\psi = c^3 - 3ac^2$ 。当仅有企业1购买低碳专利技术时，发现当减排技术对成本降低程度较大时，企业2会因自身产品边际利润的变小而退出市场，此时企业1形成垄断。若减排技术对成本降低程度较小，两家企业在消费者市场进行产量竞争。

(3) 企业2购买减排技术

企业2购买并使用减排技术的情况与第二种情况类似，只需调整情形(2)中角标即可，故可得到两企业期望产量分别为：

$$E(q_1^{NY}) = \frac{(a - c)^2}{6bc}, \quad E(q_2^{NY}) = \frac{a^2 - 8ac + 4c^2}{12bc}$$

以及两企业期望利润分别为： $E(\pi_1^{NY}) = \frac{3a^2c - a^3 + 20\psi}{27bc}$ ，

$$E(\pi_2^{NY}) = \frac{60a^2c - 11a^3 + 20\psi}{108bc} - F。$$

(4) 两企业同时购买减排技术

当两企业同时购买并使用减排技术时，其利润函数可表示为：

$$\pi_1^{YY} = (a - b(q_1^{YY} + q_2^{YY}) - \theta c) q_1^{YY} - F$$

$$\pi_2^{YY} = (a - b(q_1^{YY} + q_2^{YY}) - \theta c) q_2^{YY} - F$$

通过纳什博弈方法可求得均衡条件下两企业的期望产量为：

$$E(q_i^{YY}) = \int_0^1 \frac{a - \theta c}{3b} d\theta = \frac{2a - c}{6b}$$

两企业的期望利润为：

$$E(\pi_i^{YY}) = \int_0^1 \frac{(a - \theta c)^2}{9b} d\theta = \frac{3a(a - c) + c^2}{27b} - F_d$$

根据以上分析可得两企业策略空间的二维支付矩阵如表2所示。

表 2 企业1与企业2博弈支付矩阵

Table 2 Game payment matrix between enterprise 1 and enterprise 2

| | 购买 (Y) | 不购买 (N) |
|---------|--------------------------------|--------------------------------|
| 购买 (Y) | $E(\pi_1^{YY}), E(\pi_2^{YY})$ | $E(\pi_1^{YN}), E(\pi_2^{YN})$ |
| 不购买 (N) | $E(\pi_1^{NY}), E(\pi_2^{NY})$ | $E(\pi_1^{NN}), E(\pi_2^{NN})$ |

4 双寡头低碳专利技术购买的演化博弈分析

依据第3节中得到的四中情形下两企业的期望产量和期望利润，假定博弈主体非完全理性，下面通过演化博弈方法分析两企业博弈的平衡点及其稳定点^[16]。

4.1 演化博弈的平衡点

假设企业1和企业2可以随机独立地在多次博弈中选择策略N和Y，企业1选择策略N和Y的概率分别为 α 和 $1-\alpha$ ，企业2选择策略N和Y的概率分别为 β 和 $1-\beta$ ， f_i^S 表示企业*i*选择策略S的适应度，其中*i*=1, 2; *i*=N, Y。用利润表示其策略适应度，则企业1选择策略N的适应度为：

$$f_1^N = \beta\pi_2^{NN} + (1-\beta)\pi_2^{NY}$$

选择策略Y的适应度为：

$$f_1^Y = \beta\pi_2^{YN} + (1-\beta)\pi_2^{YY}$$

则平均适应度为： $f_1 = \alpha f_1^N + (1-\alpha)f_1^Y$ 。根据Malthusian方程，企业1选择策略N的数量增长率 $\dot{\alpha}/\alpha$ 为适应度减去平均适应度，可得：

$$\dot{\alpha}/\alpha = (1-\alpha)(\beta(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN}) + (1-\beta)(\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY}))$$

同理可求企业2选择策略N的数量增长率：

$$\dot{\beta}/\beta = (1-\beta)(\alpha(\pi_2^{NN} - \pi_2^{NY}) + (1-\alpha)(\pi_2^{YN} - \pi_2^{YY}))$$

根据式(14)与(15)可得二维动力系统I如下所示：

$$J = \begin{bmatrix} \partial \dot{\alpha} / \partial \alpha & \partial \dot{\alpha} / \partial \beta \\ \partial \dot{\beta} / \partial \alpha & \partial \dot{\beta} / \partial \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2\alpha)(\beta(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN}) + (1-\beta)(\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY})) & \alpha(1-\alpha)(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN} - \pi_1^{NY} + \pi_1^{YY}) \\ \beta(1-\beta)(\pi_2^{NN} - \pi_2^{NY} - \pi_2^{YN} + \pi_2^{YY}) & (1-2\beta)(\alpha(\pi_2^{NN} - \pi_2^{NY}) + (1-\alpha)(\pi_2^{YN} - \pi_2^{YY})) \end{bmatrix}$$

计算雅可比矩阵J在命题1中5个稳定点的行列式和迹的符合，判断其局部稳定性可得到如下命题2：

命题2：当第三方机构的低碳专利技术授权费用较高时，不存在演化稳定点；当低碳专利技术费用处于中间水平时，存在三个演化稳定点，分别为(1, 0)，(0,

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \alpha(1-\alpha)(\beta(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN}) + (1-\beta)(\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY})) \\ \dot{\beta} = \beta(1-\beta)(\alpha(\pi_2^{NN} - \pi_2^{NY}) + (1-\alpha)(\pi_2^{YN} - \pi_2^{YY})) \end{cases}$$

命题1：演化博弈二维动力系统I的平衡点分别为：

(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1)；当 $(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN})(\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY}) < 0$ 且 $(\pi_2^{NN} - \pi_2^{NY})(\pi_2^{YN} - \pi_2^{YY}) < 0$ 时，平衡点为 (α^*, β^*) ，其中

$$\alpha^* = \frac{\pi_2^{YY} - \pi_2^{YN}}{\pi_2^{NN} - \pi_2^{NY} - \pi_2^{YN} + \pi_2^{YY}}, \beta^* = \frac{\pi_1^{YY} - \pi_1^{NY}}{\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN} - \pi_1^{NY} + \pi_1^{YY}}$$

证明：根据演化博弈的二维动力系统I，令 $\alpha=0, \beta=0$ 可得 $\alpha=0$ 或 $1, \beta=0$ 或 1 ，所以(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1)为动力系统I的平衡点。当 $(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN})(\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY}) > 0$ 时， $(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN})$ 与 $(\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY})$ 同号，故 $\beta(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN}) + (1-\beta)(\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY})$ ，但当 $(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN})(\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY}) < 0$ 时， $(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN})$ 与 $(\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY})$ 异号，故 $\beta(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN}) + (1-\beta)(\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY})$ 存在等于0的解，即

$$\beta^* = \frac{\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY}}{\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN} - \pi_1^{NY} + \pi_1^{YY}}, \text{同理可求} \alpha^* = \frac{\pi_2^{YN} - \pi_2^{YY}}{\pi_2^{NN} - \pi_2^{NY} - \pi_2^{YN} + \pi_2^{YY}}$$

证毕。

4.2 平衡点的稳定性分析

根据演化博弈论，平衡点的稳定性分析可由动力系统I的雅可比矩阵局部稳定性分析得到，进而得到演化稳定点^[17](Evolutionary Stable Strategy, ESS)。动力系统I的雅可比矩阵为：

1)，(1, 1)；当减排技术费用较低时，存在两个演化稳定点(0, 0)，(1, 1)。

证明：由雅可比矩阵J计算各稳定点的行列式和迹如表3所示。

表3 各稳定点行列式和迹

Table 3 Determinants and traces of each stable point

| 稳定点 | Det J | Tr J |
|-----------------------|---|---|
| (0,0) | $(\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY})(\pi_2^{YN} - \pi_2^{YY})$ | $(\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY}) + (\pi_2^{YN} - \pi_2^{YY})$ |
| (1,0) | $(\pi_1^{YY} - \pi_1^{NY})(\pi_2^{NN} - \pi_2^{NY})$ | $(\pi_1^{YY} - \pi_1^{NY}) + (\pi_2^{NN} - \pi_2^{NY})$ |
| (0,1) | $(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN})(\pi_2^{YY} - \pi_2^{YN})$ | $(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN}) + (\pi_2^{YY} - \pi_2^{YN})$ |
| (1,1) | $(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN})(\pi_2^{NN} - \pi_2^{NY})$ | $(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN}) + (\pi_2^{NN} - \pi_2^{NY})$ |
| (α^*, β^*) | $\frac{(\pi_2^{YY} - \pi_2^{YN})(\pi_2^{NN} - \pi_2^{NY})(\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY})(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN})}{(\pi_2^{NN} - \pi_2^{NY} - \pi_2^{YN} + \pi_2^{YY})(\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN} - \pi_1^{NY} + \pi_1^{YY})}$ | 0 |

从表3可以看出,各稳定点的行列式和迹的符号由 $\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN}$, $\pi_2^{NN} - \pi_2^{NY}$, $\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY}$, $\pi_2^{YN} - \pi_2^{YY}$ 决定。根据两企业不同购买策略下的期望收益可得:

$$\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN} = \pi_2^{NN} - \pi_2^{NY} = \frac{11a^3 - 48a^2c + \xi}{108bc} + F$$

如下三个条件:

条件1: 当 $F > \frac{48a^2c - 11a^3 - \xi}{108bc}$ 时, $\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN} = \pi_2^{NN} - \pi_2^{NY} > 0$, $\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY} = \pi_2^{YN} - \pi_2^{YY} > 0$ 。

条件2: 当 $\frac{a^2(a-6c) - 2\psi}{27bc} < F < \frac{48a^2c - 11a^3 - \xi}{108bc}$ 时, 可知 $\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN} = \pi_2^{NN} - \pi_2^{NY} < 0$, $\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY} = \pi_2^{YN} - \pi_2^{YY} > 0$ 。

条件3: 当 $0 < F < \frac{a^2(a-6c) - 2\psi}{27bc}$ 时, 可知 $\pi_1^{NN} - \pi_1^{YN} = \pi_2^{NN} - \pi_2^{NY} < 0$, $\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY} = \pi_2^{YN} - \pi_2^{YY} < 0$ 。

根据以上分析,三种情况下各点稳定性如表4所示。

表4 各平衡点局部稳定性

Table 4 Local stability of each equilibrium point

| 平衡点 | 条件 1 | | | 条件 2 | | | 条件 3 | | |
|-----------------------|-------|------|----|-------|------|-----|-------|------|-----|
| | Det J | Tr J | 均衡 | Det J | Tr J | 均衡 | Det J | Tr J | 均衡 |
| (0,0) | + | + | 不 | + | + | 不 | + | - | ESS |
| (1,0) | - | - | 不 | + | - | ESS | - | - | 不 |
| (0,1) | - | - | 不 | + | - | ESS | - | - | 不 |
| (1,1) | + | + | 不 | + | - | ESS | + | - | ESS |
| (α^*, β^*) | - | 0 | 鞍点 | - | 0 | 鞍点 | - | 0 | 鞍点 |

4.3 演化结果分析

根据上述演化模型的平衡点和稳定性分析,系统演化结果可分为三种不同情况。

(1) 观察表4可知当 $F > (48a^2c - 11a^3 - \xi)/108bc$ 时,系统存在四个不稳定平衡点和一个鞍点 (α^*, β^*) 。因此,当第三方机构收取的减排技术转让费用较高时,两企业不论选择购买技术还是不购买技术,其均衡决策均不能达到一个稳定状态。其动态演化图如图2所示。

(2) 当 $(a^2(a-6c) - 2\psi)/27bc < F < (48a^2c - 11a^3 - \xi)/108bc$ 时,系统存在三个演化稳定点 $(1, 0)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(1, 1)$, 一个鞍点 (α^*, β^*) , 一个不稳定平衡点 $(0, 0)$, 其动态演化图如图3所示。说明当第三方机构收取的减排技术转让费用适中时,在最终的系统演化结果状态中,有一个企业选择购买低碳技术,或者两个企业同时都选择购买低碳技术。图3表明系统的鞍点 (α^*, β^*) 与不稳定平衡点 $(0, 0)$ 之间的直线构成了左下角两个演化区域的临界线,临界线上方区域将收敛至稳定点 $(0, 1)$, 临界线上方区域将收敛至稳定点 $(0, 1)$, 稳定状态均为一个企

$$\pi_1^{NY} - \pi_1^{YY} = \pi_2^{YN} - \pi_2^{YY} = \frac{a^2(a-6c) - 2\psi}{27bc} + F$$

$$\pi_i^{NN} - \pi_i^{YN} - \pi_i^{NY} + \pi_i^{YY} = \frac{a(7a^2 + 12c(c-2a))}{108cb} < 0$$

其中 $\xi = 4c^2(9a - 2c)$, 根据式(18)到(20)可得

业选择购买减排技术,另一个企业选择不购买。稳定点 $(0, 1)$ 、 $(1, 1)$ 与鞍点 (α^*, β^*) 构成的右上方区域则最终收敛于稳定点 $(1, 0)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(1, 1)$, 三种稳定状态共存,两企业最终的稳定状态与其初始状态及演化状态有关。

(3) 当 $0 < F < (a^2(a-6c) - 2\psi)/27bc$ 时,系统存在两个演化稳定点 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$, 一个鞍点 (α^*, β^*) , 两个不稳定平衡点 $(1, 0)$ 、 $(0, 1)$, 其动态演化图如图4所示。与前两种条件相比,此时第三方机构收取的减排技术转让费用较低,因此在最终的系统演化结果状态中,两企业趋向于都选择购买专利,或者都不购买减排技术。图4表明,系统的鞍点 (α^*, β^*) 与两个不稳定平衡点 $(1, 0)$ 、 $(0, 1)$ 构成的折线成为系统两个动态演化收敛区域的临界线,临界线左下角的区域将演化收敛至稳定点 $(0, 0)$, 即两企业均选择不购买减排技术,临界线右上角的区域将演化收敛至稳定点 $(1, 1)$, 即两企业均选择购买减排技术。系统中两个稳定策略(购买、购买)、(不购买、不购买)同时存在,系统最终的稳定结果与两个企业的最初状态密切相关。

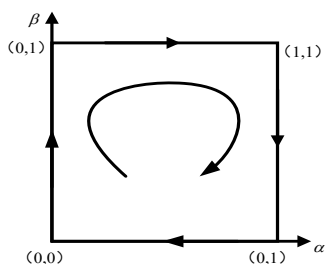


图2 条件1系统动态演化图

Figure 2 System dynamic evolution diagram under condition 1

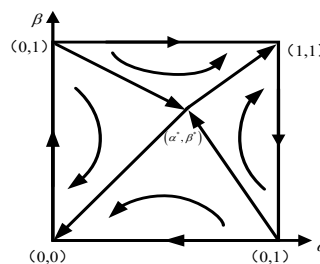


图4 条件3系统动态演化图

Figure 4 System dynamic evolution diagram under condition 3

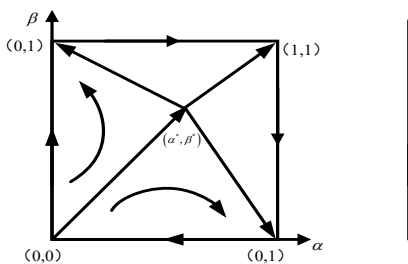


图3 条件2系统动态演化图

Figure 3 System dynamic evolution diagram under condition 2

5 双寡头不对称情形下演化博弈分析

以上分析中两家企业无差别，具有对称性。接下来考虑存在一家企业为强势企业，具有优先选择权，依然通过演化博弈模型求解企业购买低碳专利技术均衡结果。不失一般性，假设企业1为强势企业，为行业领导者，企业2为追随者。同时假设企业1生产成本为 c_1 ，企业2生产成本为 c_2 ，并且 $3c_2/4 < c_1 < c_2$ ，说明企业1作为领导者相对企业2具有技术优势。潜在市场需求 $2c_1 > a > 3c_2 - 2c_1$ ，此约束可以有效地体现两企业之间的竞争关系，有助于表达企业进入或退出市场的动态关系。

表5 各平衡点稳定性分析

Table 5 Stability analysis of each equilibrium point

| 平衡点 | $F > 0.083$ | | | $0.077 < F < 0.083$ | | | $0.072 < F < 0.077$ | | | $0.062 < F < 0.072$ | | |
|-----------------------|-------------|---------|----|---------------------|---------|-----|---------------------|---------|-----|---------------------|---------|-----|
| | Det(J) | Tr(J) | 均衡 | Det(J) | Tr(J) | 均衡 | Det(J) | Tr(J) | 均衡 | Det(J) | Tr(J) | 均衡 |
| (0,0) | + | + | 不 | + | + | 不 | + | + | 不 | + | + | 不 |
| (1,0) | - | - | 不 | - | - | 不 | - | - | 不 | + | - | ESS |
| (0,1) | - | - | 不 | + | - | ESS | + | - | ESS | + | - | ESS |
| (1,1) | + | + | 不 | - | + | 鞍点 | - | - | 鞍点 | + | - | ESS |
| (α^*, β^*) | - | 0 | 鞍点 | + | 0 | 鞍点 | + | 0 | 鞍点 | - | 0 | 鞍点 |

| 平衡点 | $0.039 < F < 0.062$ | | | $0.017 < F < 0.039$ | | | $F < 0.017$ | | |
|-----------------------|---------------------|---------|-----|---------------------|---------|-----|-------------|---------|-----|
| | Det(J) | Tr(J) | 均衡 | Det(J) | Tr(J) | 均衡 | Det(J) | Tr(J) | 均衡 |
| (0,0) | - | + | 鞍点 | - | - | 不 | + | - | ESS |
| (1,0) | - | - | 不 | - | - | 不 | - | - | 不 |
| (0,1) | - | - | 不 | - | - | 不 | - | - | 不 |
| (1,1) | + | - | ESS | + | - | ESS | + | - | ESS |
| (α^*, β^*) | + | 0 | 鞍点 | + | 0 | 鞍点 | - | 0 | 鞍点 |

通过Stackelberg博弈方法求得企业不同购买策略下的均衡期望利润（附录计算1），演化博弈过程可参考两企业无差别情况下的推导过程。我们着重分析存在强势企

业情况下各平衡点的局部稳定性。由于期望利润较为复杂，我们通过算例分析各平衡点的稳定性。参数假设为 $a=1, c_2=1, c_1=0.8, b=1$ ，经过仿真计算各平衡点稳定

性如表5所示。

(1) 观察表5可知当 $F > 0.083$ 时, 系统存在四个不稳定平衡点, 仅存在一个鞍点 (α^*, β^*) 。因此, 当第三方机构收取的低碳专利技术授权费用较高时, 领导者企业和追随着企业不论选择购买或不购买减排技术, 两企业的均衡决策均不能达到一个稳定状态。其动态演化图如图5所示。

(2) 当 $0.077 < F < 0.083$ 与 $0.072 < F < 0.077$ 时, 系统的演化结果相同, 存在唯一演化稳定点 $(0,1)$, 两个鞍点 (α^*, β^*) 、 $(1,1)$, 两个不稳定平衡点 $(0,0)$ 、 $(1,0)$ 。其动态演化图如图6所示。不论两企业最初处于何种状态, 系统最终的演化稳定状态均为 $(0,1)$, 稳定策略为领导者企业1不购买减排技术, 追随着企业2购买减排技术。因为技术授权费用 F 处于 $(0.072, 0.083)$ 时, 费用相对较高, 企业1作为领导者具有优势, 购买减排技术扩大竞争优势的动力不强, 而企业2则需要购买减排技术缩小竞争差距。

(3) 当 $0.062 < F < 0.072$ 时, 系统存在三个演化稳定点 $(1,0)$ 、 $(0,1)$ 、 $(1,1)$, 一个鞍点 (α^*, β^*) , 一个不稳定平衡点 $(0,0)$, 其动态演化图如图7所示。此时授权费用适中, 导致最终的结果状态中, 有一个企业(领导者或追随着)选择购买减排技术, 或者两个企业都选择购买减排技术。此演化结果与两企业无差别情况下, 情形2形同, 在此不进行赘述。

(4) 当 $0.039 < F < 0.062$ 与 $0.017 < F < 0.039$ 时, 存在唯一演化稳定点 $(1,1)$, 两个鞍点 (α^*, β^*) 、 $(0,0)$, 两个不稳定平衡点 $(0,1)$ 、 $(1,0)$ 。不论两企业最初处于何种状态, 系统最终的演化稳定状态均为 $(1,1)$, 稳定策略为领导者企业1购买减排技术, 追随着企业2也购买减排技术。因为授权费用 F 处于 $(0.017, 0.062)$ 时, 费用适中, 企业1作为领导者虽然具有一定优势, 但是仍有较大动力购买技术扩大竞争优势, 而企业2则非常需要购买技术缩小竞争差距。因此系统最终演化为稳定策略(购买, 购买), 其动态演化图如图8所示。

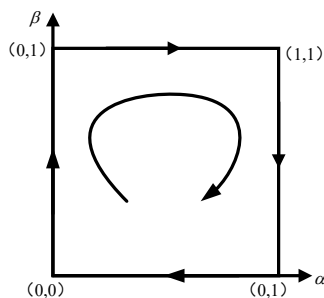


图5 $F > 0.083$ 时演化图

Figure 5 Evolution diagram under $F > 0.083$

(5) 当 $0 < F < (\alpha^2(a-6c)-2\psi)/27bc$ 时, 系统存在两个演化稳定点 $(0, 0)$ 、 $(1, 1)$, 一个鞍点 (α^*, β^*) , 两个不稳定平衡点 $(1, 0)$ 、 $(0, 1)$, 其动态演化图如图9所示。此时专利第三方机构收取的减排技术授权费用较低, 因此在最终的系统演化结果状态中, 两企业趋向于都选择购买减排技术, 或者都不购买。该演化结果与两企业无差异情况下情形3相同不再赘述。

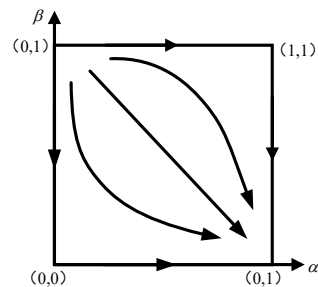


图6 $0.072 < F < 0.083$ 演化图

Figure 6 Evolution diagram under $0.072 < F < 0.083$

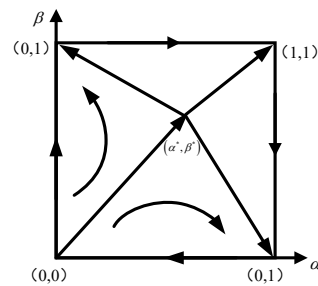


图7 $0.062 < F < 0.072$ 演化图

Figure 7 Evolution diagram under $0.062 < F < 0.072$

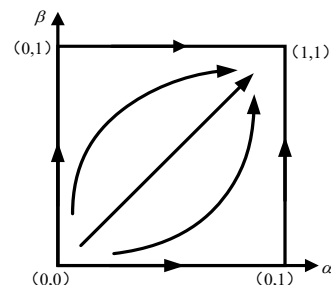


图8 $0.017 < F < 0.062$ 时演化图

Figure 8 Evolution diagram under $0.017 < F < 0.062$

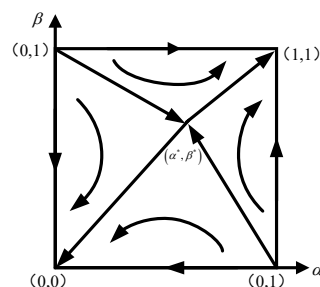


图9 $F < 0.017$ 时演化图

Figure 9 Evolution diagram under $F < 0.017$

比较两企业无差别和存在强弱关系情形下演化结果发现：当两企业无差别时，不存在唯一稳定状态，而当两企业存在强弱关系时，若 $F \in (0.072, 0.083)$ 仅存在 $(0, 1)$ ，即企业2购买减排技术的唯一稳定状态；若 $F \in (0.017, 0.062)$ 仅存在 $(1, 1)$ ，即两家企业都购买减排技术的唯一稳定状态。当两家企业无差别处于对等地位时，所选择策略具有一致性，故均衡演化结果不会出现唯一稳定状态，但两家企业地位不对等时，处于弱势的企业对购买技术具有更大热情，此时两企业策略选择不一致，故出现唯一稳定状态的演化情况。

6 结论与启示

首先考虑市场中存在一个低碳技术授权第三方和两个竞争关系的同质制造企业，运用演化博弈方法，讨论两企业是否应该购买低碳技术来降低生产成本从而提高企业竞争力的问题。研究发现：当第三方机构的减排技术转让费较高时，不存在演化稳定点；当减排技术转让费适中时，即处于 $(a^2(a-6c)-2\psi)/27bc < F < (48a^2c-11a^3-\xi)/108bc$ 时，存在三个演化稳定策略（购买，不购买）、（不购买，购买）、（购买，购买）；当减排技术转让费较低时，存在两个演化稳定策略（不购买，不购买）、（购买，购买）。此外，考虑企业1为领导者，企业2为追随者的情形下，发现其二维动力系统的Malthusian方程以及雅可比矩阵和平衡点与风险中性情况下一致，当技术授权企业的授权费用 F 从0增大到1的过程中，系统稳定策略将经历：（1）（不购买，不购买）或（购买，购买）共存；（2）（购买，购买）；（3）（购买，不购买）或（不购买，购买）或（购买，购买）共存；（4）（不购买，购买）；（5）无稳定策略等五个过程。

解决环境问题，关键在于促进先进减排技术在行业内的迅速推广，第三方技术授权可以有效地实现低碳专利技术在行业内的快速流动，提升行业整体效率。因此，从本文的结论可以得到以下管理启示：第三方减排技术拥有者若对技术定价过高，不论企业是对称抑或是处于领导者-追随者的处境，从治污全局来看，都不利于减排技术的推广，企业并没有动力去购买先进的减排技术，因此，第三方技术授权企业可以根据实际情况，将定价处于一定的区间而使演化稳定点向（购买，购买）趋近，例如在本文的假设中，若计算出的授权费用处于一定的区间时： $0.039 < F < 0.062$ 与 $0.017 < F < 0.039$ ，可以发现两企业都会向（购买，购买）这一均衡结果演化，从而实现治污技术的推广。

本文的研究局限于假设比较苛刻情况下，在将来的研究中还可以从以下几个方面进行扩展：（1）从异质消费者的角度对本文进行扩展想必会得到一些新的结论；（2）若两企业对减排技术的使用效果有不同了解，可以从信息不对称角度对问题进行新的研究；（3）若专利第

三方机构通过拍卖方式授权减排技术，想必企业参与策略会有较大改变。

参考文献

- [1] Barari S, Agarwal G, W J (Chris) Zhang. A decision framework for the analysis of green supply chain contracts: An evolutionary game approach [J]. *Expert Systems with Applications*, 2012, 39 (3): 2965–2976.
- [2] Araujo R A, de Souza N A. An evolutionary game theory approach to the dynamics of the labour market: A formal and informal perspective [J]. *Structural Change and Economic Dynamics*, 2010, 21 (2): 101–110.
- [3] Xiao T, Chen G. Wholesale pricing and evolutionary stable strategies of retailers with imperfectly observable objective [J]. *European Journal of Operational Research*, 2019, 196 (3): 1190–1201.
- [4] Yu H, Zeng A Z, Zhao L. Analyzing the evolutionary stability of the vendor managed inventory supply chains [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2009, 56 (1): 274–282.
- [5] 易余胤, 肖条军, 盛昭瀚. 合作研发中机会主义行为的演化博弈分析 [J]. *管理科学学报*, 2005 (4): 80–87.
- [6] 郑君君, 韩笑, 邹祖绪, 等. IPO市场中风险投资家策略的演化博弈分析 [J]. *管理科学学报*, 2012 (2): 72–82.
- [7] 刘旭旺, 汪定伟. 分组评标专家行为的演化博弈分析 [J]. *管理科学学报*, 2015 (1): 50–61.
- [8] 盛光华, 张志远. 补贴方式对创新模式选择影响的演化博弈研究 [J]. *管理科学学报*, 2015 (9): 34–45.
- [9] Chatterjee K, Zufferey D, Nowak M A. Evolutionary game dynamics in populations with different learners [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2012 (301): 161–173.
- [10] 王芹鹏, 赵道致, 何龙飞. 供应链企业碳减排投资策略选择与行为演化研究 [J]. *管理工程学报*, 2020 (3): 181–189.
- [11] Naini S G J, Aliahmadi A R, Eskandari M J. Designing a mixed performance measurement system for environmental supply chain management using evolutionary game theory and balanced scorecard: A case study of an auto industry supply chain [J]. *Resource, Conservation and Recycling*, 2011, 55 (6): 593–603.
- [12] 徐建中, 吕希琛. 低碳经济下政府、制造企业和消费群体决策行为演化研究 [J]. *运筹与管理*,

- 2014 (6) : 81-91.
- [13] Zhu Q, Dou Y. Evolutionary game model between government and core enterprises in greening supply chains [J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2007, 27 (12) : 85-89.
- [14] 李友东, 赵道致, 夏良杰. 低碳供应链环境下政府和核心企业的演化博弈模型 [J]. *统计与决策*, 2019 (20) : 38-41.
- [15] 徐建中, 徐莹莹. 基于演化博弈的制造企业低碳技术采纳决策机制研究 [J]. *运筹与管理*, 2014 (5) : 264-272.
- [16] Yu H, Zeng A Z, Zhao L. Analyzing the evolutionary stability of the vendor-managed inventory supply chains [J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2009, 56 (1) : 274-282.
- [17] Friedman D. *Evolutionary games in economics* [J]. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1991, 59 (3) : 637-666.

Research on Enterprise Low Carbon Patent Technology Purchase Strategy from the Perspective of Evolutionary Game

Xu Hao

School of Economics and Management, Southwest Petroleum University, Chengdu

Abstract: The new normal economic development stage poses new challenges to China's low-carbon transformation, which objectively requires enterprises to innovate their emission reduction behaviors, thus giving birth to the third-party authorization of low-carbon patented technologies. Technology licensing can effectively realize the rapid flow of low-carbon emission reduction technologies from the third party to enterprises in the industry, reduce the emission reduction costs of enterprises and promote technological progress. Using evolutionary game theory, this paper discusses whether oligarchs buy low-carbon patented technology to reduce the generation cost and improve the competitiveness of enterprises. It is found that there is no evolutionary stable point when the transfer fee of low-carbon technology of third-party institutions is high; When the low-carbon technology transfer fee is appropriate, there are three evolutionary stable points (1,0), (1,1) and (1,1); When the patent transfer fee is low, there are two evolutionary stability points (0,0) and (1,1). In addition, considering the existence of a strong enterprise, this paper studies the impact of the low-carbon technology licensing fee of a third-party institution on the purchase decisions of the two enterprises. Finally, according to the evolution trend of equilibrium results, relevant management implications are given.

Key words: Enterprise competition; Low carbon technology patents; Evolutionary game; Purchasing strategy

附录

计算1

在企业1为强势企业，企业2为跟随者情况下，通过Stackelberg博弈方法求解企业不同购买策略下的均衡期望利润如下：

(1) 两家企业都不购买减排技术

当两家企业都不购买减排技术时，两企业利润函数分别为：

$$\pi_1^{NN} = (a - b(q_1^{NN} + q_2^{NN}) - c_1)q_1^{NN}$$

$$\pi_2^{NN} = (a - b(q_1^{NN} + q_2^{NN}) - c_2)q_2^{NN}$$

此时生产过程不存在不确定因素，所以期望值等于实际值。通过Stackelberg博弈方法求得两企业均衡产量为： $E(q_1^{NN}) = \frac{a + c_2 - 2c_1}{2b}$, $E(q_2^{NN}) = \frac{a - 3c_2 + 2c_1}{4b}$ 利润为：

$$E(\pi_1^{NN}) = \frac{(a + c_2 - 2c_1)^2}{8b}, E(\pi_2^{NN}) = \frac{(a - 3c_2 + 2c_1)^2}{16b}。$$

(2) 企业1购买减排技术

仅有企业1购买并使用减排技术时，两家企业利润函数为：

$$\pi_1^{YN} = (a - b(q_1^{YN} + q_2^{YN}) - \theta c_1)q_1^{YN} - F$$

$$\pi_2^{YN} = (a - b(q_1^{YN} + q_2^{YN}) - c_2)q_2^{YN}$$

通过Stackelberg博弈方法求得均衡产量和利润如表6所示。

表6 两企业不对称情况下企业1均衡产量、利润

Table 6 Under the asymmetric situation of two enterprises, enterprise 1 achieves equilibrium production and profit

| 成本降低程度 θ | 均衡产量 | 均衡利润 |
|---|--|---|
| $0 < \theta < \frac{3c_2 - a}{2c_1}$ | $q_1^{YN} = \frac{a - \theta c_1}{2b}$ | $\pi_1^{YN} = \frac{(a - \theta c_1)^2}{4b} - F$ |
| | $q_2^{YN} = 0$ | $\pi_2^{YN} = 0$ |
| $\frac{3c_2 - a}{2c_1} \leq \theta < 1$ | $q_1^{YN} = \frac{a + c_2 - 2\theta c_1}{2b}$ | $\pi_1^{YN} = \frac{(a + c_2 - 2\theta c_1)^2}{8b} - F$ |
| | $q_2^{YN} = \frac{a + 2\theta c_1 - 3c_2}{4b}$ | $\pi_2^{YN} = \frac{(a + 2\theta c_1 - 3c_2)^2}{16b}$ |

注释1: $3c_2 - 2c_1 < a < 3c_2$

根据表5通过分段积分求得两企业均衡产量为：

$$E(q_1^{YN}) = \frac{8c_1(a + c_2 - c_1) + (a + c_2)(a - 3c_2)}{16bc_1}$$

$$E(q_2^{YN}) = \frac{(a - 3c_2 + 2c_1)^2}{16bc_1}$$

均衡利润为：

$$E(\pi_1^{YN}) = \frac{4(4c_1^3 - 3c_1(a + c_2)(2c_1 - a - c_2)) - (a - 3c_2)\varpi}{96bc_1} - F$$

$$E(\pi_2^{YN}) = \frac{(a - 3c_2 + 2c_1)^3}{96bc_1}$$

其中 $\varpi = 5a^2 - 12ac_2 + 3c_2^2$ 。

(3) 企业2购买减排技术

仅有企业2购买并使用减排技术时，两企业利润函数为：

$$\pi_1^{NY} = (a - b(q_1^{NY} + q_2^{NY}) - c_1)q_1^{NY}$$

$$\pi_2^{NY} = (a - b(q_1^{NY} + q_2^{NY}) - \theta c_2)q_2^{NY} - F$$

通过Stackelberg博弈方法求得均衡产量和利润如表7所示。

表7 两企业不对称情况下企业2均衡产量、利润

Table 7 Under the asymmetric situation of two enterprises, the equilibrium output and profit of enterprise 2

| 成本降低程度 θ | 均衡产量 | 均衡利润 |
|--|--|---|
| $0 < \theta < \frac{2c_1 - a}{c_2}$ | $q_1^{NY} = 0$ | $\pi_1^{NY} = 0$ |
| | $q_2^{NY} = \frac{a - \theta c_2}{2b}$ | $\pi_2^{NY} = \frac{(a - \theta c_2)^2}{4b}$ |
| $\frac{2c_1 - a}{c_2} \leq \theta < 1$ | $q_1^{NY} = \frac{a + \theta c_2 - 2c_1}{2b}$ | $\pi_1^{NY} = \frac{(a + \theta c_2 - 2c_1)^2}{8b}$ |
| | $q_2^{NY} = \frac{a + 2c_1 - 3\theta c_2}{4b}$ | $\pi_2^{NY} = \frac{(a + 2c_1 - 3\theta c_2)^2}{16b} - F$ |

注释2: $2c_1 - c_2 < a < 2c_1$

根据表6分段积分求得两企业均衡产量为：

$$E(q_1^{NY}) = \frac{a(a - 2(2c_1 - c_2)) + (2c_1 - c_2)^2}{2bc_2}$$

$$E(q_2^{NY}) = \frac{2c_2^2 - (a(a - 2(2c_1 - c_2)) + (2c_1 - c_2)^2)}{8bc_2}$$

均衡利润为：

$$E(\pi_1^{NY}) = \frac{a^2(a - 6c_1 + 3c_2) + 3(2c_1 - c_2)^2 - (2c_1 - c_2)^3}{24bc_2}$$

$$E(\pi_2^{NY}) = \frac{3c_2(3c_2^2 + (a + 2c_1)((a + 2c_1) - 3c_2)) - (7a - 2c_1)(a - 2c_1)^2}{48bc_2} - F$$

(4) 两企业都购买减排技术

当企业1与企业2同时购买减排技术时，两企业利润函数为：

$$\pi_1^{YY} = (a - b(q_1^{YY} + q_2^{YY}) - \theta c_1)q_1^{YY} - F$$

$$\pi_2^{YY} = (a - b(q_1^{YY} + q_2^{YY}) - \theta c_2)q_2^{YY} - F$$

通过Stackelberg博弈方法求得均衡产量为:

$$E(q_1^{YY}) = \int_0^1 \frac{a + \theta(c_2 - 2c_1)}{2b} d\theta = \frac{2a + c_2 - 2c_1}{4b}$$
$$E(q_2^{YY}) = \int_0^1 \frac{a + \theta(2c_1 - 3c_2)}{4b} d\theta = \frac{2a + 2c_1 - 3c_2}{8b}$$

均衡利润为:

$$E(\pi_1^{YY}) = \int_0^1 \frac{(a + \theta(c_2 - 2c_1))^2}{8b} d\theta = \frac{3a(a - 2c_1 + c_2) + (2c_1 - c_2)^2}{24b} - F$$
$$E(\pi_2^{YY}) = \int_0^1 \frac{a + \theta(2c_1 - 3c_2)}{4b} d\theta = \frac{3a(a + 2c_1 - 3c_2) + (2c_1 - 3c_2)^2}{48b} - F$$

(综合注释1和注释2条件, 可得 $3c_2/4 < c_1 < c_2$ 且 $2c_1 > a > 3c_2 - 2c_1$)